

Online Supplement to:

On the Almost Exact-Equivalence of the Radial and Spherical Unconstrained Cholesky-Based Parameterization Methods for Correlation Matrices

By Chandra R. Bhat (corresponding author) and Aupal Mondal

Appendix A: Detailed Simulation Results

Table A1. Simulation result for Low correlation case

Parameter	Metrics	Scale = 0.2	Scale = 0.6	Scale = 0.8	Scale = 1.0	Scale = 1.2	Scale = 1.4	Scale = 2.0
β_{1c}	True value	-0.250	-0.250	-0.250	-0.250	-0.250	-0.250	-0.250
	Estimate	-0.254	-0.252	-0.250	-0.252	-0.252	-0.251	-0.252
	APB (%)	1.597	0.759	0.193	0.824	0.766	0.225	0.991
	FSSD	0.033	0.032	0.033	0.032	0.032	0.035	0.032
	ASE	0.033	0.033	0.033	0.033	0.033	0.033	0.033
	APBASE (%)	0.540	4.127	1.660	2.414	4.183	4.669	4.178
β_{1v}	True value	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	Estimate	1.004	1.004	1.002	1.003	1.004	1.002	1.003
	APB (%)	0.371	0.411	0.206	0.258	0.402	0.229	0.350
	FSSD	0.043	0.043	0.043	0.045	0.043	0.042	0.043
	ASE	0.044	0.044	0.044	0.044	0.044	0.044	0.044
	APBASE (%)	2.137	1.753	0.724	2.982	1.813	2.731	1.738
β_{2c}	True value	-0.500	-0.500	-0.500	-0.500	-0.500	-0.500	-0.500
	Estimate	-0.502	-0.501	-0.501	-0.502	-0.501	-0.499	-0.501
	APB (%)	0.475	0.143	0.136	0.463	0.250	0.230	0.246
	FSSD	0.035	0.034	0.036	0.035	0.034	0.036	0.034
	ASE	0.035	0.034	0.034	0.035	0.034	0.034	0.034
	APBASE (%)	0.826	0.595	3.995	2.476	0.583	4.780	0.588
β_{2v}	True value	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	Estimate	1.003	1.003	1.002	1.004	1.003	1.002	1.003
	APB (%)	0.045	0.045	0.044	0.046	0.045	0.046	0.045
	FSSD	0.045	0.045	0.044	0.046	0.045	0.046	0.045
	ASE	0.044	0.045	0.044	0.044	0.045	0.044	0.045
	APBASE (%)	1.921	0.435	0.786	3.660	0.313	4.242	0.334
β_{3c}	True value	-0.750	-0.750	-0.750	-0.750	-0.750	-0.750	-0.750
	Estimate	-0.751	-0.755	-0.752	-0.753	-0.754	-0.753	-0.754
	APB (%)	0.187	0.610	0.224	0.436	0.572	0.348	0.556
	FSSD	0.037	0.036	0.040	0.036	0.036	0.036	0.036
	ASE	0.038	0.038	0.038	0.038	0.038	0.037	0.038
	APBASE (%)	1.808	6.534	6.852	3.840	6.447	3.491	6.514
β_{3v}	True value	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	Estimate	1.001	1.003	1.003	1.006	1.003	1.005	1.003
	APB (%)	0.061	0.335	0.305	0.579	0.349	0.523	0.340
	FSSD	0.044	0.045	0.046	0.046	0.045	0.048	0.045
	ASE	0.046	0.045	0.046	0.045	0.045	0.047	0.045
	APBASE (%)	5.859	0.789	0.905	2.195	0.507	2.130	0.639
β_{4c}	True value	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000
	Estimate	-1.003	-1.003	-1.002	-1.004	-1.004	-1.002	-1.004
	APB (%)	0.318	0.314	0.231	0.352	0.387	0.160	0.376
	FSSD	0.048	0.046	0.045	0.046	0.046	0.048	0.046
	ASE	0.048	0.046	0.047	0.048	0.046	0.049	0.046
	APBASE (%)	0.998	0.425	3.617	4.794	0.490	0.410	0.539
β_{4v}	True value	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500
	Estimate	0.502	0.500	0.500	0.501	0.501	0.498	0.501
	APB (%)	0.462	0.006	0.013	0.274	0.201	0.335	0.195
	FSSD	0.063	0.065	0.062	0.062	0.065	0.062	0.065
	ASE	0.062	0.062	0.062	0.062	0.062	0.062	0.062
	APBASE (%)	0.508	4.392	0.242	0.216	4.317	0.091	4.349
β_{5c}	True value	-1.250	-1.250	-1.250	-1.250	-1.250	-1.250	-1.250
	Estimate	-1.252	-1.251	-1.251	-1.251	-1.252	-1.250	-1.251
	APB (%)	0.149	0.118	0.043	0.082	0.150	0.006	0.080
	FSSD	0.046	0.043	0.044	0.046	0.043	0.044	0.043
	ASE	0.045	0.045	0.045	0.045	0.045	0.044	0.045
	APBASE (%)	1.737	3.156	1.765	1.385	3.155	0.151	3.071
β_{5v}	True value	-0.500	-0.500	-0.500	-0.500	-0.500	-0.500	-0.500
	Estimate	-0.510	-0.507	-0.510	-0.513	-0.508	-0.507	-0.509
	APB (%)	1.985	1.358	2.037	2.582	1.623	1.426	1.760
	FSSD	0.101	0.108	0.101	0.107	0.107	0.101	0.108
	ASE	0.105	0.106	0.106	0.106	0.106	0.107	0.106
	APBASE (%)	4.445	1.934	4.424	0.939	0.946	6.158	1.627

Parameter	Metrics	Scale = 0.2	Scale = 0.6	Scale = 0.8	Scale = 1.0	Scale = 1.2	Scale = 1.4	Scale = 2.0
ρ_{12}	True value	0.300	0.300	0.300	0.300	0.300	0.300	0.300
	Estimate	0.297	0.296	0.294	0.296	0.295	0.295	0.295
	APB (%)	0.987	1.324	2.099	1.207	1.528	1.552	1.766
	FSSD	0.042	0.042	0.043	0.044	0.043	0.042	0.043
	ASE	0.046	0.046	0.046	0.046	0.046	0.046	0.046
	APBASE (%)	9.518	7.173	5.551	4.663	7.023	8.817	6.649
ρ_{13}	True value	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
	Estimate	0.199	0.198	0.199	0.201	0.198	0.198	0.199
	APB (%)	0.297	0.844	0.615	0.460	0.952	1.187	0.590
	FSSD	0.046	0.047	0.047	0.048	0.047	0.047	0.047
	ASE	0.049	0.048	0.049	0.049	0.048	0.049	0.048
	APBASE (%)	4.737	2.842	3.001	2.548	2.964	3.689	2.825
ρ_{14}	True value	-0.200	-0.200	-0.200	-0.200	-0.200	-0.200	-0.200
	Estimate	-0.196	-0.195	-0.197	-0.200	-0.196	-0.198	-0.197
	APB (%)	1.759	2.361	1.606	0.243	1.964	1.243	1.629
	FSSD	0.044	0.043	0.044	0.045	0.043	0.044	0.043
	ASE	0.045	0.045	0.045	0.045	0.045	0.045	0.045
	APBASE (%)	2.076	5.205	1.543	0.472	5.172	2.712	5.284
ρ_{15}	True value	-0.150	-0.150	-0.150	-0.150	-0.150	-0.150	-0.150
	Estimate	-0.148	-0.153	-0.149	-0.146	-0.152	-0.149	-0.151
	APB (%)	1.056	1.695	0.944	2.470	1.265	0.462	0.795
	FSSD	0.056	0.056	0.057	0.059	0.057	0.057	0.057
	ASE	0.059	0.059	0.059	0.059	0.059	0.059	0.059
	APBASE (%)	4.757	5.458	4.100	1.300	4.931	5.128	4.579
ρ_{23}	True value	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250
	Estimate	0.247	0.246	0.248	0.247	0.247	0.248	0.247
	APB (%)	1.390	1.631	0.964	1.382	1.295	0.994	1.314
	FSSD	0.049	0.049	0.050	0.050	0.049	0.050	0.049
	ASE	0.049	0.048	0.049	0.049	0.048	0.049	0.048
	APBASE (%)	1.293	1.151	1.399	1.324	1.357	2.694	1.445
ρ_{24}	True value	-0.300	-0.300	-0.300	-0.300	-0.300	-0.300	-0.300
	Estimate	-0.297	-0.296	-0.296	-0.298	-0.297	-0.298	-0.298
	APB (%)	1.046	1.317	1.415	0.701	0.954	0.730	0.542
	FSSD	0.046	0.043	0.042	0.042	0.043	0.043	0.042
	ASE	0.045	0.045	0.045	0.045	0.045	0.045	0.045
	APBASE (%)	1.747	5.394	6.352	5.948	5.598	3.636	5.740
ρ_{25}	True value	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100
	Estimate	0.094	0.100	0.099	0.094	0.098	0.100	0.098
	APB (%)	6.410	0.024	1.490	5.689	2.107	0.099	2.053
	FSSD	0.059	0.058	0.058	0.060	0.058	0.060	0.058
	ASE	0.060	0.059	0.060	0.060	0.059	0.060	0.059
	APBASE (%)	2.167	2.665	3.041	0.051	2.276	1.379	1.874
ρ_{34}	True value	-0.250	-0.250	-0.250	-0.250	-0.250	-0.250	-0.250
	Estimate	-0.245	-0.245	-0.245	-0.246	-0.245	-0.243	-0.245
	APB (%)	1.921	1.848	1.952	1.664	2.014	2.684	2.142
	FSSD	0.046	0.043	0.045	0.046	0.043	0.048	0.043
	ASE	0.047	0.048	0.048	0.048	0.048	0.047	0.048
	APBASE (%)	2.668	10.306	6.436	4.613	10.325	0.688	10.365
ρ_{35}	True value	-0.200	-0.200	-0.200	-0.200	-0.200	-0.200	-0.200
	Estimate	-0.197	-0.201	-0.196	-0.197	-0.201	-0.199	-0.200
	APB (%)	1.595	0.314	2.097	1.423	0.463	0.326	0.192
	FSSD	0.063	0.064	0.061	0.067	0.063	0.061	0.063
	ASE	0.064	0.063	0.064	0.065	0.063	0.064	0.063
	APBASE (%)	1.783	0.699	5.390	2.436	0.761	3.768	1.078
ρ_{45}	True value	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250
	Estimate	0.247	0.246	0.244	0.248	0.247	0.248	0.248
	APB (%)	1.325	1.714	2.589	0.946	1.312	0.687	0.824
	FSSD	0.049	0.053	0.051	0.052	0.053	0.051	0.053
	ASE	0.052	0.053	0.053	0.052	0.053	0.052	0.052
	APBASE (%)	6.517	0.184	3.738	1.330	0.198	2.345	0.211

Table A2. Simulation result for High correlation case

Parameter	Metrics	Scale = 0.2	Scale = 0.6	Scale = 0.8	Scale = 1.0	Scale = 1.2	Scale = 1.4	Scale = 2.0
β_{1c}	True value	-0.250	-0.250	-0.250	-0.250	-0.250	-0.250	-0.250
	Estimate	-0.257	-0.256	-0.255	-0.255	-0.256	-0.255	-0.256
	APB (%)	2.815	2.449	2.083	1.977	2.247	1.877	2.264
	FSSD	0.032	0.030	0.032	0.031	0.033	0.032	0.032
	ASE	0.032	0.032	0.031	0.032	0.032	0.032	0.032
	APBASE (%)	1.064	5.729	3.184	3.131	0.905	0.085	1.168
β_{1v}	True value	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	Estimate	1.007	1.007	1.010	1.010	1.010	1.012	1.011
	APB (%)	0.739	0.702	1.037	1.042	1.028	1.165	1.096
	FSSD	0.038	0.041	0.040	0.040	0.039	0.040	0.038
	ASE	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040
	APBASE (%)	5.371	3.383	0.234	0.277	2.694	0.225	5.836
β_{2c}	True value	-0.500	-0.500	-0.500	-0.500	-0.500	-0.500	-0.500
	Estimate	-0.509	-0.507	-0.507	-0.506	-0.506	-0.506	-0.506
	APB (%)	1.703	1.483	1.381	1.165	1.262	1.289	1.150
	FSSD	0.034	0.035	0.034	0.034	0.034	0.032	0.033
	ASE	0.034	0.034	0.035	0.034	0.034	0.034	0.034
	APBASE (%)	1.153	1.945	1.334	0.823	0.497	5.742	2.607
β_{2v}	True value	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	Estimate	1.008	1.009	1.013	1.013	1.012	1.012	1.012
	APB (%)	0.038	0.042	0.041	0.039	0.041	0.041	0.043
	FSSD	0.038	0.042	0.041	0.039	0.041	0.041	0.043
	ASE	0.041	0.041	0.039	0.041	0.041	0.041	0.040
	APBASE (%)	7.473	2.665	5.199	5.245	1.063	0.539	5.552
β_{3c}	True value	-0.750	-0.750	-0.750	-0.750	-0.750	-0.750	-0.750
	Estimate	-0.756	-0.756	-0.757	-0.757	-0.758	-0.758	-0.758
	APB (%)	0.802	0.768	0.948	0.938	1.121	1.045	1.007
	FSSD	0.038	0.035	0.037	0.034	0.038	0.039	0.035
	ASE	0.037	0.037	0.034	0.037	0.037	0.037	0.037
	APBASE (%)	1.738	5.521	6.964	7.315	3.497	5.157	4.671
β_{3v}	True value	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	Estimate	1.009	1.012	1.014	1.014	1.010	1.010	1.014
	APB (%)	0.939	1.198	1.376	1.396	0.999	1.044	1.356
	FSSD	0.043	0.041	0.043	0.044	0.041	0.040	0.043
	ASE	0.043	0.042	0.044	0.043	0.043	0.044	0.043
	APBASE (%)	0.319	3.715	1.033	1.454	6.302	8.590	0.296
β_{4c}	True value	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000
	Estimate	-1.007	-1.003	-1.006	-1.004	-1.005	-1.003	-1.006
	APB (%)	0.685	0.300	0.566	0.424	0.496	0.289	0.563
	FSSD	0.047	0.042	0.045	0.047	0.044	0.045	0.046
	ASE	0.045	0.045	0.047	0.045	0.045	0.045	0.046
	APBASE (%)	2.813	7.649	3.344	3.254	2.831	0.109	1.228
β_{4v}	True value	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500
	Estimate	0.503	0.499	0.503	0.502	0.502	0.501	0.505
	APB (%)	0.566	0.215	0.664	0.422	0.388	0.224	0.920
	FSSD	0.055	0.053	0.056	0.053	0.055	0.055	0.059
	ASE	0.056	0.056	0.053	0.056	0.056	0.056	0.056
	APBASE (%)	1.070	5.507	5.199	5.290	1.737	0.913	5.321
β_{5c}	True value	-1.250	-1.250	-1.250	-1.250	-1.250	-1.250	-1.250
	Estimate	-1.273	-1.273	-1.273	-1.273	-1.272	-1.272	-1.276
	APB (%)	1.834	1.852	1.859	1.874	1.787	1.725	2.047
	FSSD	0.044	0.045	0.043	0.043	0.044	0.045	0.043
	ASE	0.043	0.043	0.043	0.043	0.044	0.044	0.043
	APBASE (%)	1.899	3.054	0.189	0.101	0.444	3.368	0.236
β_{5v}	True value	-0.500	-0.500	-0.500	-0.500	-0.500	-0.500	-0.500
	Estimate	-0.507	-0.509	-0.507	-0.509	-0.504	-0.502	-0.505
	APB (%)	1.488	1.851	1.432	1.865	0.850	0.401	1.035
	FSSD	0.097	0.090	0.098	0.088	0.093	0.093	0.091
	ASE	0.096	0.096	0.090	0.098	0.093	0.092	0.095
	APBASE (%)	0.965	6.873	8.044	10.981	0.043	0.430	4.115

Parameter	Metrics	Scale = 0.2	Scale = 0.6	Scale = 0.8	Scale = 1.0	Scale = 1.2	Scale = 1.4	Scale = 2.0
ρ_{12}	True value	0.600	0.600	0.600	0.600	0.600	0.600	0.600
	Estimate	0.596	0.594	0.593	0.594	0.591	0.590	0.595
	APB (%)	0.677	1.081	1.205	1.022	1.514	1.653	0.835
	FSSD	0.034	0.034	0.037	0.035	0.036	0.037	0.037
	ASE	0.036	0.037	0.035	0.037	0.037	0.037	0.036
	APBASE (%)	6.295	7.080	4.329	3.962	0.375	1.132	2.572
ρ_{13}	True value	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
	Estimate	0.198	0.200	0.198	0.196	0.196	0.191	0.192
	APB (%)	0.899	0.244	1.239	1.805	2.207	4.279	3.899
	FSSD	0.044	0.045	0.046	0.046	0.048	0.049	0.047
	ASE	0.046	0.047	0.046	0.046	0.047	0.047	0.047
	APBASE (%)	3.782	3.326	0.900	1.304	2.024	3.596	0.821
ρ_{14}	True value	-0.500	-0.500	-0.500	-0.500	-0.500	-0.500	-0.500
	Estimate	-0.494	-0.490	-0.494	-0.493	-0.490	-0.493	-0.489
	APB (%)	1.137	1.974	1.232	1.463	1.936	1.318	2.226
	FSSD	0.039	0.037	0.038	0.037	0.039	0.038	0.036
	ASE	0.038	0.038	0.037	0.038	0.039	0.038	0.038
	APBASE (%)	2.112	3.533	2.940	2.443	1.680	0.382	5.638
ρ_{15}	True value	-0.800	-0.800	-0.800	-0.800	-0.800	-0.800	-0.800
	Estimate	-0.786	-0.779	-0.776	-0.775	-0.781	-0.781	-0.780
	APB (%)	1.788	2.643	2.957	3.100	2.352	2.385	2.544
	FSSD	0.041	0.044	0.050	0.045	0.045	0.045	0.046
	ASE	0.047	0.050	0.045	0.049	0.049	0.049	0.050
	APBASE (%)	15.505	13.083	9.070	8.859	8.220	9.442	7.386
ρ_{23}	True value	0.600	0.600	0.600	0.600	0.600	0.600	0.600
	Estimate	0.593	0.591	0.590	0.592	0.594	0.592	0.591
	APB (%)	1.215	1.561	1.648	1.382	1.052	1.381	1.432
	FSSD	0.037	0.039	0.039	0.038	0.036	0.037	0.038
	ASE	0.039	0.039	0.038	0.039	0.039	0.039	0.039
	APBASE (%)	3.391	0.728	3.652	3.222	8.933	5.507	4.431
ρ_{24}	True value	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
	Estimate	0.204	0.208	0.207	0.207	0.205	0.204	0.208
	APB (%)	2.155	3.999	3.468	3.329	2.620	1.795	4.059
	FSSD	0.043	0.040	0.043	0.044	0.042	0.041	0.040
	ASE	0.043	0.043	0.044	0.043	0.043	0.043	0.043
	APBASE (%)	1.265	6.115	0.502	0.833	4.158	5.257	7.221
ρ_{25}	True value	-0.500	-0.500	-0.500	-0.500	-0.500	-0.500	-0.500
	Estimate	-0.496	-0.514	-0.513	-0.512	-0.506	-0.503	-0.510
	APB (%)	0.858	2.748	2.510	2.319	1.208	0.646	1.925
	FSSD	0.051	0.048	0.052	0.053	0.051	0.052	0.049
	ASE	0.054	0.052	0.053	0.052	0.053	0.053	0.053
	APBASE (%)	6.073	8.825	3.122	2.362	4.385	2.145	7.521
ρ_{34}	True value	0.600	0.600	0.600	0.600	0.600	0.600	0.600
	Estimate	0.599	0.596	0.596	0.595	0.594	0.594	0.592
	APB (%)	0.248	0.606	0.711	0.793	1.024	1.003	1.293
	FSSD	0.036	0.036	0.035	0.033	0.036	0.036	0.035
	ASE	0.035	0.035	0.033	0.035	0.036	0.036	0.036
	APBASE (%)	3.703	1.966	6.918	6.513	0.278	0.402	3.543
ρ_{35}	True value	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
	Estimate	0.204	0.200	0.200	0.201	0.198	0.204	0.197
	APB (%)	2.226	0.133	0.016	0.572	0.833	1.877	1.609
	FSSD	0.052	0.056	0.056	0.054	0.056	0.055	0.055
	ASE	0.057	0.057	0.053	0.056	0.057	0.057	0.057
	APBASE (%)	9.444	1.776	5.071	3.333	2.141	3.649	3.700
ρ_{45}	True value	0.600	0.600	0.600	0.600	0.600	0.600	0.600
	Estimate	0.589	0.591	0.590	0.589	0.592	0.594	0.595
	APB (%)	1.781	1.498	1.738	1.794	1.391	1.069	0.894
	FSSD	0.037	0.036	0.039	0.037	0.037	0.036	0.037
	ASE	0.039	0.039	0.036	0.039	0.039	0.039	0.039
	APBASE (%)	3.603	6.287	6.419	5.421	6.367	9.313	3.714