

JORGE GABRIEL ZORNBERG

ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS DO COMPORTAMENTO DE  
ESCAVAÇÕES UTILIZANDO UM MODELO ELASTO-PLÁSTICO

Tese apresentada ao Departamento  
de Engenharia Civil da PUC-RJ  
como parte dos requisitos para  
obtenção do título de Mestre em  
Engenharia Civil - Geotecnia.

Orientador:

Roberto Francisco de Azevedo

Departamento de Engenharia Civil  
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro, agosto de 1989.



## RESUMO

No presente trabalho desenvolveu-se um programa de elementos finitos com o objetivo de simular processos construtivos de obras geotécnicas, sobretudo, de escavações. O modelo elasto-plástico de Lade (1977, 1979), caracterizado por uma lei de fluxo não-associada e pela existência de duas superfícies de plastificação, foi utilizado para representar o comportamento tensão-deformação do solo. Adotaram-se eficientes esquemas de armazenamento e de resolução incremental-iterativa do sistema de equações não-linear e não-simétrico gerado durante a abordagem deste problema. Com o objetivo de simular as etapas do processo construtivo, foram implementadas técnicas de eliminação (escavação) e incorporação (aterro) de elementos na malha original. Utilizaram-se elementos de barra, caracterizados por um comportamento bilinear, para simulação de estroncas ou tirantes. A linguagem de macro-comandos utilizada na estrutura do programa possibilita a resolução da sequência de problemas de elementos finitos correspondente às diferentes fases de execução de uma obra.

Uma série de análises foi desenvolvida com o propósito de comparar valores obtidos numericamente com resultados analíticos de problemas de solução conhecida.

Por último, descreve-se a utilização do programa na análise de dois casos práticos. No primeiro, efetuou-se o estudo da superfície de ruptura no talude de uma escavação não-escorada executada numa centrífuga com um material não-coesivo.

No segundo, foi analisada uma obra de escavação executada pela Companhia do Metropolitano de São Paulo. Definiram-se, a partir de ensaios experimentais, os parâmetros elasto-plásticos da Argila Vermelha e do Solo Variegado da bacia sedimentar de São Paulo. O modelo de Lade mostrou-se muito adequado para representar o comportamento destes materiais. A simulação numérica da sequência de etapas construtivas desta obra permitiu a determinação dos deslocamentos e tensões na massa de solo adjacente à escavação e das solicitações a que estão submetidos os diferentes elementos que constituem a estrutura de suporte.

## AGRADECIMENTOS

Escrever é tentar reter o que sempre escapa.  
Agradecer é não deixar escapar que a  
caminhada é conjunta; por isso, agradeço:

- a Roberto Francisco de Azevedo pela dedicada e eficiente orientação, pelo incentivo e, principalmente, por sua disponibilidade irrestrita.

- a Luciano Vicente de Medeiros pelo entusiasmo transmitido e a credibilidade em mim depositada.

- aos Professores da Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil da PUC-RJ pela permanente contribuição.

- à Companhia do Metropolitano de São Paulo pelo fornecimento de material indispensável à confecção desta tese e, particularmente, a Ricardo Leite e Kenzo Hori pela atenção concedida.

- a Alexandre Benetti Parreira pelos valiosos resultados de laboratório que possibilitaram a obtenção dos parâmetros dos materiais.

- a José Patiño pela contribuição no processamento gráfico dos resultados.

- aos Colegas da Pós-Graduação, pelo companheirismo presente em todos os momentos.

- à Cátedra de Mecânica dos Solos da Universidad Nacional de Córdoba, em especial a Emilio Redolfi, pelo incentivo nas primeiras pesquisas nesta área.

- a Analúcia Ururahy pela dedicação junto à realização dos desenhos.

- a Fani Lemos Zaborowski pela competência na elaboração dos desenhos e pelo apoio inestimável na edição final deste trabalho.

- a Esther e Israel Zaborowski pela constante atenção e apoio.

- a Monica Silvia Zornberg pela confiança e carinho permanentes.

- a Luisa e Mario Zornberg cujos ilimitados esforços na minha formação, contínua dedicação e ternura, permitiram que conseguisse avançar até este ponto.

- a Denise Lemos Zaborowski por tantas horas de leitura Freudiana dispensadas em prol de Terzaghi e modelos elasto-plásticos, pelo amor e profunda amizade.

- ao CNPq, CIDA e FAPERJ pelo auxílio financeiro prestado nas várias etapas deste trabalho.

## SUMÁRIO

Lista de Figuras.....	vi
Lista de Tabelas.....	xii
Capítulo 1 - INTRODUÇÃO.....	1
Capítulo 2 - ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS DE ESCAVAÇÕES ESCORADAS.....	7
2.1 - Análise Tradicional de Escavações Escoradas....	7
2.1.1 - Pressões Exercidas Sobre a Estrutura de Contenção.....	7
2.1.2 - Deslocamentos Decorrentes da Escavação.....	14
2.2 - Fundamentos do Método dos Elementos Finitos....	16
2.2.1 - Introdução.....	16
2.2.2 - Idealização do Meio Contínuo.....	18
2.2.3 - Funções de Interpolação.....	19
2.2.4 - Transformação de Coordenadas.....	20
2.2.5 - Relação Deformação-Deslocamento.....	23
2.2.6 - Relação Tensão-Deformação.....	24
2.2.7 - A Matriz de Rigidez.....	25
2.2.8 - Forças de Massa e de Superfície.....	29
2.3 - Simulação Numérica de Escavações.....	32
2.3.1 - Idealização do Problema.....	32
2.3.2 - O Estado Inicial de Tensões.....	34
2.3.3 - O Processo de Escavação.....	37
2.4 - Revisão de Análises de Escavações Efetuadas por Elementos Finitos.....	40
Capítulo 3 - O MODELO ELASTO-PLÁSTICO DE LADE.....	51
3.1 - Introdução.....	51
3.2 - Conceitos Básicos da Teoria da Plasticidade....	55
3.2.1 - Comportamento Característico dos Materiais.....	55
3.2.2 - Critérios de Plastificação.....	56
3.2.3 - Direção e Magnitude das Deformações Plásticas.....	59
3.3 - Utilização do Modelo de Lade em Areias.....	61
3.3.1 - Componentes de Deformação.....	61
3.3.2 - Deformações Elásticas.....	64
3.3.3 - Deformações Plásticas Colapsíveis.....	65
3.3.4 - Deformações Plásticas Expansivas.....	67

3.4 - Utilização do Modelo de Lade em Argilas.....	72
3.4.1 - Deformações Elásticas.....	73
3.4.2 - Deformações Plásticas Colapsíveis.....	74
3.4.3 - Deformações Plásticas Expansivas.....	76
3.4.4 - Argilas Pré-Adensadas.....	80
<b>Capítulo 4 - CONCEITOS UTILIZADOS NA ANÁLISE NÃO-LINEAR DO PROBLEMA.....</b>	<b>86</b>
4.1 - Solução de Sistema Linear de Equações Algébricas com Matriz de Coeficientes Esparsa e Não-Simétrica.....	86
4.1.1 - Considerações Iniciais.....	86
4.1.2 - Método de Resolução Adotado.....	88
4.1.3 - Técnicas de Armazenamento de Matrizes Esparsas.....	93
4.1.4 - Tempo de Processamento.....	96
4.2 - Implementação Numérica do Modelo Elasto-Plástico de Lade.....	99
4.2.1 - Formulação da Matriz Constitutiva.....	99
4.2.2 - Simetrização do Problema.....	103
4.3 - Abordagem da Plasticidade Incremental em Elementos Finitos.....	107
4.3.1 - Técnicas de Resolução de Problemas Não-Lineares.....	107
4.3.2 - Cálculo das Tensões em Problemas Elasto-Plásticos.....	112
4.3.3 - Implementação do Processo de Resolução.....	116
<b>Capítulo 5 - O PROGRAMA ANLOG.....</b>	<b>124</b>
5.1 - Introdução.....	124
5.2 - Macro-Comandos Implementados no Programa.....	126
5.2.1 - Considerações Iniciais.....	126
5.2.2 - Macro-Comandos Básicos de um Problema de Elementos Finitos.....	127
5.2.3 - Macro-Comandos de Ativação e Desativação de Elementos Bidimensionais.....	129
5.2.4 - Macro-Comandos de Ativação e Desativação de Elementos de Barra.....	131
5.2.5 - Macro-Comandos para Pré-Fixação e Alteração de Variáveis.....	134
5.2.6 - Macro-Comandos de Leitura e Criação de Arquivos.....	137
5.3 - Estrutura do Programa.....	138
5.3.1 - Organização das Subrotinas.....	138
5.3.2 - Organização das Variáveis do Programa..	142
5.4 - Análises Preliminares.....	145
5.4.1 - Verificação da Implementação de Elementos Bidimensionais.....	145
5.4.2 - Verificação da Implementação de Elementos de Barra.....	150
5.4.3 - Verificação da Implementação do Processo de Escavação.....	151
5.4.4 - Verificação da Implementação das Relações Constitutivas.....	153

Capítulo 6 - ANÁLISE DE UM CASO DE RUPTURA.....	159
6.1 - Considerações Iniciais.....	159
6.2 - Resolução do Problema por Análise de Equilíbrio Limite.....	161
6.3 - Resultados Numéricos Obtidos.....	164
6.4 - Análise dos Resultados.....	168
 Capítulo 7 - ANÁLISE DE UMA ESCAVAÇÃO ESTRONCADA DO METROPOLITANO DA CIDADE DE SÃO PAULO.....	173
7.1 - Características do Problema.....	173
7.1.1 - Considerações Iniciais.....	173
7.1.2 - Características do Perfil Geotécnico.....	176
7.1.3 - Características do Poço Salas Técnicas.....	179
7.2 - Modelagem da Argila Vermelha.....	180
7.2.1 - Características Geotécnicas do Material.....	180
7.2.2 - Obtenção dos Parâmetros do Material.....	183
7.2.2.1 - Considerações Iniciais.....	183
7.2.2.2 - Parâmetros Elásticos.....	186
7.2.2.3 - Parâmetro Plástico Colapsível.....	190
7.2.2.4 - Parâmetros Plásticos Expansivos.....	192
7.2.3 - Comparação entre Resultados Experimentais e a Predição do Modelo de Lade.....	200
7.3 - Modelagem do Solo Variegado.....	208
7.3.1 - Características Geotécnicas do Material.....	208
7.3.2 - Obtenção dos Parâmetros do Material.....	208
7.4 - Hipóteses de Cálculo.....	212
7.4.1 - Representação do Meio Contínuo.....	212
7.4.2 - Simulação do Processo Construtivo.....	216
7.5 - Resultados Obtidos.....	222
7.5.1 - Análise das Tensões e Deslocamentos na Massa de Solo.....	222
7.5.2 - Análise do Comportamento da Estrutura de Suporte.....	243
7.5.3 - Considerações Finais.....	248
 Capítulo 8 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....	252
 Apêndice - Expressões Utilizadas na Calibração de Argilas Pré-Adensadas.....	260
A.1 - Ensaio HC.....	260
A.2 - Ensaio CTC.....	261
 Referências Bibliográficas.....	263

## LISTA DE FIGURAS

Figura	Pág.
2.1 - Distribuição típica de tensões numa escavação escorada.....	8
2.2 - Desenvolvimento das pressões exercidas sobre a estrutura de suporte.....	9
2.3 - Diagrama de pressões aparentes proposto por Terzaghi (1941).....	10
2.4 - Diagrama de pressões aparentes proposto por Peck .....	11
2.5 - Diagrama de pressões aparentes proposto por Terzaghi e Peck (1967).....	12
2.6 - Diagrama de pressões aparentes proposto por Armento (1972).....	13
2.7 - Diagrama de pressões aparentes proposta por Tschebotarioff para argilas.....	14
2.8 - Critério empírico para determinação de recalques devido a escavações (Peck, 1969).....	15
2.9 - Elemento isoparamétrico de oito nós.....	20
2.10 - Transformação da área do elemento.....	21
2.11 - Elemento em estado de equilíbrio.....	26
2.12 - Forças distribuídas de superfície aplicadas no lado de um elemento.....	31
2.13 - Simulação do processo de escavação.....	37
3.1 - Curva tensão-deformação típica de um metal submetido a carregamento uniaxial.....	55
3.2 - Componentes de deformação num ensaio drenado de compressão triaxial convencional.....	63

3.3	-	Localização das superfícies de plastificação.....	64
3.4	-	Processo de Plastificação indicado no plano triaxial...	65
3.5	-	Superfícies de plastificação expansiva e de ruptura	
		a) Corte no plano triaxial.....	68
		b) Corte no plano octaédrico.....	68
3.6	-	Superfícies de plastificação e potencial plástico expansivas.....	71
3.7	-	Coefficiente de Poisson em função do índice de Plasticidade (Lade, 1979).....	73
3.8	-	Determinação dos parâmetros elásticos.....	74
3.9	-	Determinação do parâmetro plástico colapsível.....	76
3.10	-	Determinação dos parâmetros de ruptura do material.....	77
3.11	-	Variação de $\eta_z$ com $f_p$ para a Grundite Clay (Lade, 1979).....	78
3.12	-	Relação entre o trabalho plástico expansivo e $f_p$ para a Grundite Clay (Lade, 1979).....	80
3.13	-	Localização das superfícies de plastificação numa argila pré-adensada.....	81
3.14	-	Ensaio de Compressão Hidrostática num material pré-adensado.....	83
3.15	-	Ensaio de Compressão Triaxial Convencional num material pré-adensado.....	84
4.1	-	Regiões em que se considera dividida a matriz de coeficientes.....	90
4.2	-	Processo de decomposição triangular.....	91
4.3	-	Esquema básico das subrotinas utilizadas para resolução de sistemas de equações algébricas simétricas e não-simétricas.....	92
4.4	-	Armazenamento em banda da matriz $[A]_{n \times n}$ na matriz $[Ab]_{n \times v}$ .....	94
4.5	-	Elementos da matriz esparsa a serem armazenados com a técnica Skyline.....	95
4.6	-	Sistema de equações com matriz armazenada em perfil de banda variável (sistema de equações $\alpha$ ).....	97
4.7	-	Resolução da equação $R = f(\delta)$ utilizando o método de Newton-Raphson Standard.....	108

4.8	- Resolução da equação $R = f(\delta)$ utilizando o método de Euler.....	110
4.9	- Resolução da equação $R = f(\delta)$ utilizando o método de Newton-Raphson Modificado.....	111
4.10	- Processo desenvolvido pela subrotina <i>SOLVE</i> .....	117
4.11	- Atualização do tipo de carregamento e dos níveis de tensões correspondentes às superfícies de plastificação.....	122
5.1	- Elemento de barra com dois pontos nodais.....	132
5.2	- Lei bilinear correspondente ao comportamento de uma estronca.....	133
5.3	- Aplicação de pré-esforço no elemento de barra.....	134
5.4	- Árvore de subprogramas.....	139
5.5	- Localização dos ponteiros no vetor de trabalho.....	146
5.6	- Malha de elementos finitos utilizada para análise de um cilindro vazado elástico.....	148
5.7	- Distribuição de tensões obtida numericamente e analiticamente.....	149
5.8	- Deslocamentos radiais obtidos numericamente e analiticamente.....	150
5.9	- Elemento de barra solicitado pela força $P$ .....	151
5.10	- Malha de elementos finitos utilizada para verificar o processo de escavação.....	152
5.11	- Deslocamentos horizontais.....	153
5.12	- Levantamento de fundo e recalque superficial.....	154
5.13	- Ensaio CTC a ser analisado.....	155
5.14	- Elemento utilizado para simulação numérica do ensaio CTC.....	155
5.15	- Comparação de resultados obtidos na verificação da implementação das relações constitutivas.....	156
6.1	- Análise do equilíbrio de um talude infinito.....	161
6.2	- Malha de elementos finitos utilizada.....	162
6.3	- a) Elementos de elevada rigidez ( $K_B$ ) e de baixa rigidez ( $K_A$ ) na escavação.....	163
	- b) Estrutura unidimensional com elementos de rigidez $K_A$ e $K_B$ .....	163

6.4	- Superfície de ruptura definida com o modelo de Lade para $i = 58^\circ$ .....	166
6.5	- Mecanismo de ruptura não desenvolvido para $i \cong \phi = 31^\circ$ .....	166
6.6	- Superfície de ruptura definida com o modelo de Lade para $\gamma_{solo} = 0.72 \gamma_{inico}$ .....	167
6.7	- Superfície de ruptura definida com o modelo hiperbólico de Duncan.....	167
6.8	- a) Regionalização no plano triaxial das trajetórias de tensões.....	170
	- b) Localização na escavação das trajetórias de tensões envolvidas.....	170
6.9	- Pontos caracterizados por um mesmo valor do nível de tensões $f_p$ .....	171
6.10	- Pontos caracterizados por um mesmo valor de $FS'$ .....	172
7.1	- Linhas do Metropolitano da cidade de São Paulo.....	174
7.2	- Localização da obra em estudo.....	175
7.3	- Planta e perfil geotécnico do Poço Salas Técnicas.....	178
7.4	- Planta do escoramento no nível 804.00 m.....	181
7.5	- Corte vertical da obra.....	182
7.6	- Ensaios CTC utilizados na calibração da Argila Vermelha.....	185
7.7	- Ensaio HC utilizado na calibração da Argila Vermelha.....	186
7.8	- Curvas transformadas para obtenção do módulo de elasticidade.....	188
7.9	- Obtenção dos parâmetros elásticos da Argila Vermelha...189	
7.10	- Obtenção do parâmetro colapsível da Argila Vermelha....191	
7.11	- Obtenção dos parâmetros de ruptura da Argila Vermelha..193	
7.12	- Relação $\eta_2$ vs $f_p$ para calibração da Argila Vermelha....195	
7.13	- Obtenção dos parâmetros $t_1$ e $t_2$ da Argila Vermelha.....196	
7.14	- Relação entre $f_p$ e $W_p/p_a$ .....197	
7.15	- Obtenção dos parâmetros $p$ e $l$ da Argila Vermelha.....198	

7.16 - Obtenção dos parâmetros $\alpha$ e $\beta$ da Argila Vermelha.....	199
7.17 - Comparação entre os resultados experimentais do ensaio HC e a predição do modelo de Lade.....	201
7.18 - Comparação entre os resultados experimentais do ensaio CTC ( $\sigma_3 = 0.5 \text{ kg/cm}^2$ ) e a predição do modelo de Lade.....	203
7.19 - Comparação entre os resultados experimentais do ensaio CTC ( $\sigma_3 = 1.0 \text{ kg/cm}^2$ ) e a predição do modelo de Lade.....	204
7.20 - Comparação entre os resultados experimentais do ensaio CTC ( $\sigma_3 = 2.0 \text{ kg/cm}^2$ ) e a predição do modelo de Lade.....	205
7.21 - Comparação entre os resultados experimentais dos ensaios de descarregamento lateral e a predição do modelo de Lade.....	207
7.22 - Obtenção dos parâmetros elásticos do Solo Variegado....	210
7.23 - Obtenção dos parâmetros de ruptura do Solo Variegado...	211
7.24 - Malha de elementos finitos utilizada.....	213
7.25 - Etapas da análise anteriores à escavação do Poço Salas Técnicas.....	217
7.26 - Macro-comandos utilizados nas etapas da análise anteriores à escavação do Poço Salas Técnicas.....	219
7.27 - Etapas da análise correspondentes à escavação do Poço Salas Técnicas.....	221
7.28 - Macro-comandos utilizados nas etapas da escavação do Poço Salas Técnicas.....	222
7.29 - Estado inicial de tensões.....	227
7.30 - a) Campo de deslocamentos obtido após a escavação dos subsolos do prédio adjacente.....	228
b) Estado de tensões obtido após a escavação dos subsolos do prédio adjacente.....	229
7.31 - a) Campo de deslocamentos obtido após a fundação do prédio adjacente.....	230
b) Estado de tensões obtido após a fundação do prédio adjacente.....	231
7.32 - a) Campo de deslocamentos obtido após o rebaixamento do lençol freático.....	232
b) Estado de tensões obtido após o rebaixamento do lençol freático.....	233

7.33 -	a)	Campo de deslocamentos obtido após a primeira fase da escavação do Poço Salas Técnicas.....	234
	b)	Estado de tensões obtido após a primeira fase da escavação do Poço Salas Técnicas.....	235
7.34 -	a)	Campo de deslocamentos obtido após a segunda fase da escavação do Poço Salas Técnicas.....	236
	b)	Estado de tensões obtido após a segunda fase da escavação do Poço Salas Técnicas.....	237
7.35 -	a)	Campo de deslocamentos obtido após a terceira fase da escavação do Poço Salas Técnicas.....	238
	b)	Estado de tensões obtido após a terceira fase da escavação do Poço Salas Técnicas.....	239
7.36 -	a)	Campo de deslocamentos obtido após a quarta fase da escavação do Poço Salas Técnicas.....	240
	b)	Estado de tensões obtido após a quarta fase da escavação do Poço Salas Técnicas.....	241
7.37 -		Pontos caracterizados por um mesmo valor de $FS'$ .....	242
7.38 -		Evolução dos deslocamentos durante a escavação do Poço Salas Técnicas.....	244
7.39 -		Forças exercidas pelo escoramento.....	245
7.40 -		Componente horizontal de tensões nas etapas anteriores à escavação do poço Salas Técnicas.....	246
7.41 -		Empuxo exercido sobre a estrutura de suporte ao longo da escavação do Poço Salas Técnicas.....	247
7.42 -		Esforços exercidos sobre a estrutura de suporte na última fase da escavação.....	248
7.43 -		Envoltória dos esforços exercidos sobre a estrutura de suporte.....	249

## LISTA DE TABELAS

Tabela	Pág.
4.1 - Tempos de processamento - Sistema de equações ( $\alpha$ ).....	98
4.2 - Tempos de processamento - Sistema de equações ( $\beta$ ).....	99
5.1 - Variáveis alocadas dinamicamente no vetor de trabalho...143	
5.2 - Tempos de processamento para diferentes métodos de resolução do problema não-linear.....157	
5.3 - Tempos de processamento para diferentes técnicas de simetrização da matriz de rigidez.....158	
7.1 - Parâmetros da Argila Vermelha correspondentes ao modelo elasto-plástico de Lade.....200	
7.2 - Parâmetros do Solo Variegado.....212	
7.3 - Tempos consumidos no processamento da análise.....250	

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

Atualmente, como consequência da expansão dos sistemas de transporte urbano, da construção de grandes edificações e do traçado de redes de condução de líquidos, vem sendo constatado um grande aumento no número e nas dimensões das escavações em solo executadas em regiões urbanas densamente povoadas. Nestas circunstâncias, a previsão dos deslocamentos ocasionados na massa do solo torna-se muitas vezes uma providência indispensável para o sucesso destas obras de engenharia.

Uma das principais dificuldades na previsão racional destes deslocamentos consiste na modelagem correta do comportamento tensão-deformação dos solos. Características constitutivas dos solos tais como não-linearidade, dilatância e irreversibilidade das deformações, são aspectos que podem ser representados através de modelos elasto-plásticos. Dentre estes, o modelo desenvolvido por Lade (1977, 1979) tem se

mostrado relevante para representar o comportamento de solos arenosos e de argilas normalmente adensadas. Esta formulação consiste num modelo elasto-plástico com endurecimento isotrópico que faz uso de duas superfícies de plastificação, uma das quais é definida por uma lei de fluxo não-associada. Para a sua implementação em elementos finitos torna-se necessária a definição da relação tensão-deformação incremental.

O método dos elementos finitos representa, provavelmente, o procedimento de cálculo mais geral disponível na atualidade para a análise das tensões e deslocamentos originados por uma obra de escavação. A correta simulação numérica das diversas etapas do processo construtivo desempenha um papel fundamental na precisão dos resultados obtidos neste tipo de análise.

O principal objetivo deste trabalho consiste no desenvolvimento e utilização de um modelo de cálculo que permita a análise pelo método dos elementos finitos de escavações suportadas por estruturas flexíveis. O programa *ANLOG* (Análise Não-Linear de Obras Geotécnicas) foi então desenvolvido visando a análise de problemas bidimensionais de deformação plana e axissimétricos. Foram consideradas como características relevantes neste código a implementação do modelo elasto-plástico mencionado e a simulação mais realística do processo construtivo de uma obra.

A implementação deste modelo elasto-plástico,

caracterizado por uma lei de fluxo não-associada, implica no surgimento de um problema não-linear representado por uma matriz de rigidez não-simétrica. Tanto esta não-linearidade quanto a não-simetria foram aqui abordadas através da utilização de várias metodologias, possibilitando a resolução dos diversos problemas.

Com relação à simulação do processo construtivo, definiu-se um código versátil o suficiente para representar tanto um processo de escavação quanto de aterro, através da eliminação e da incorporação de elementos. Foram ainda considerados a presença de estroncas e tirantes de uma estrutura de suporte por meio da utilização de elementos de barra de comportamento bilinear. A estrutura do programa faz uso de macro-comandos (Taylor, 1977), tornando-se bastante adequada para a abordagem de processos consistentes em uma sequência de análises por elementos finitos.

No segundo capítulo efetua-se uma revisão conceitual acerca de alguns fundamentos básicos. Descreve-se inicialmente a abordagem tradicionalmente efetuada na análise de escavações escoradas, se evidenciando o empirismo que norteia o dimensionamento deste tipo de obras. Para possibilitar uma visão racional deste problema utilizou-se o método de elementos finitos cujos conceitos básicos e características da sua aplicação na simulação numérica de escavações são explicitadas. Realiza-se uma revisão bibliográfica de trabalhos que utilizam o método dos elementos finitos para a análise de obras de

escavação.

No capítulo 3, após uma breve incursão nos fundamentos básicos da teoria da plasticidade, são apresentados os conceitos do modelo elasto-plástico aqui utilizado. Estes conceitos permitiram a formulação necessária para a modelagem de areias (Lade, 1977) e de argilas normalmente adensadas (Lade, 1979), sendo também utilizados neste trabalho para caracterização do comportamento de argilas pré-adensadas.

São analisadas, no capítulo 4, as particularidades do programa no que diz respeito à abordagem da não-linearidade do problema. Apresenta-se inicialmente o método utilizado para a resolução de sistemas lineares de equações algébricas, cuja adoção esteve condicionada às características de não-simetria e esparcidade da matriz de rigidez. A formulação da matriz constitutiva do modelo de Lade junto a algumas sugestões para a sua simetrização são aqui apontadas, indicando-se finalmente as características das metodologias adotadas para a resolução do problema da não-linearidade física.

Tendo por base os conceitos focalizados nos capítulos anteriores, foi sistematizado o programa *ANLOG*, cujas características de implementação são descritas no quinto capítulo. As características dos diferentes comandos através dos quais são executadas as diversas facilidades incorporadas ao código são aqui destacadas junto com a organização básica das subrotinas e variáveis do programa. A verificação das

diferentes facilidades incorporadas a este programa, fase essencial à confiabilidade do código, efetua-se ao término deste capítulo.

O capítulo 6 trata da análise de uma escavação a céu aberto que atinge o estado de ruptura. A escavação, efetuada numa centrífuga, desenvolveu-se num solo sem coesão cujo comportamento foi caracterizado utilizando o modelo elasto-plástico aqui implementado. Os resultados obtidos mostram uma clara concordância entre a cunha de ruptura caracterizada na análise numérica e os resultados teóricos obtidos através de uma análise de equilíbrio limite.

No capítulo 7 aplica-se o modelo de cálculo aqui desenvolvido para previsão do comportamento de uma escavação estroncada executada como parte do projeto de expansão do metropolitano da cidade de São Paulo. Toma-se especial consideração na obtenção dos parâmetros elasto-plásticos do modelo aqui utilizado para a Argila Vermelha e o Solo Variegado, materiais que constituem o perfil geotécnico da região em estudo. É analisada a adequabilidade do modelo elasto-plástico para representar o comportamento tensão-deformação destes materiais. São indicadas a representação efetuada do meio contínuo e a simulação adotada para o processo construtivo da obra, caracterizando assim as hipóteses de cálculo utilizadas deste problema. Como resultado desta análise são obtidos, para cada etapa da sequência considerada neste estudo, os valores correspondentes ao estado

final de tensões e aos deslocamentos originados na massa de solo junto à escavação, assim como os esforços que atuam na estrutura de contenção.

Por fim, apresentam-se no capítulo 8 as conclusões finais deste estudo, sendo também apontadas sugestões para futuros trabalhos.

## CAPÍTULO 2

### ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS DE ESCAVAÇÕES ESCORADAS

#### 2.1 ANÁLISE TRADICIONAL DE ESCAVAÇÕES ESCORADAS

##### 2.1.1 Pressões Exercidas Sobre a Estrutura de Contenção

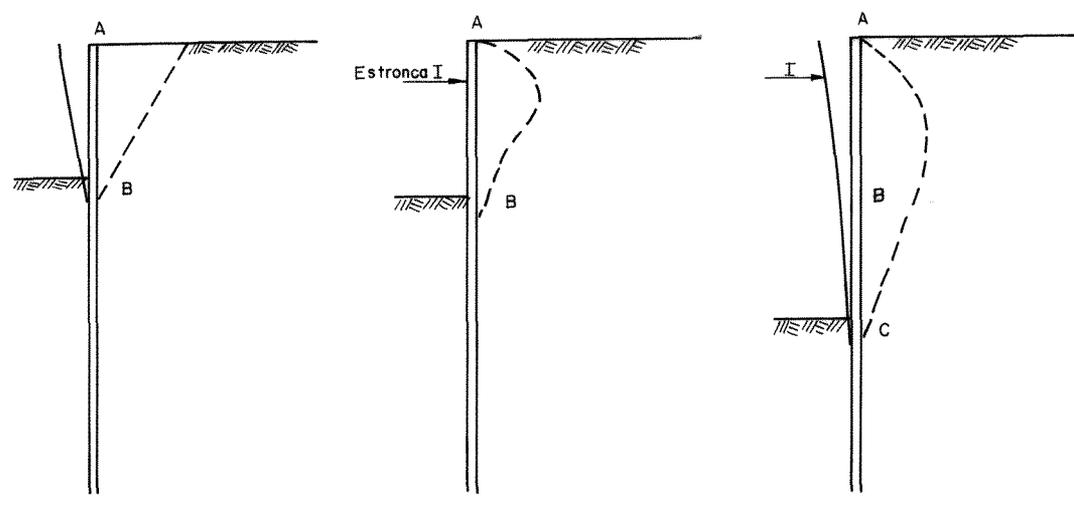
Observações sobre o comportamento de escavações escoradas têm demonstrado que as pressões exercidas sobre a estrutura de contenção possuem uma distribuição semelhante à representada na figura (2.1). Esta distribuição difere notavelmente da correspondente ao estado de empuxo ativo. Verificou-se também que o empuxo total exercido sobre a estrutura de contenção pode ser superior ao resultante do estado ativo.

A maneira na qual as pressões exercidas sobre a estrutura de suporte são desenvolvidas ao longo de um processo de escavação pode ser idealizada segundo a figura (2.2) (Bowles, 1982). Num primeiro estágio a parede encontra-se submetida a um

estado de empuxo ativo devido ao qual a estrutura sofre um deslocamento inicial. Posteriormente, ao se aplicar a força correspondente de uma estronca a parede e o solo não são levados até a sua posição inicial porém, a força aplicada pela estronca, de uma magnitude superior à do empuxo ativo, provocará um acréscimo de pressão na parede (etapa b). Ao efetuar-se a segunda fase da escavação provoca-se um novo deslocamento lateral e, provavelmente, alguma perda na força exercida pela estronca (etapa c). A aplicação de uma segunda estronca provocará uma nova distribuição de pressões indicada no estágio d. Portanto, resulta evidente que a magnitude da pressão exercida sobre a parede de contenção se encontra diretamente relacionada com as forças exercidas pelas estroncas, sendo que a distribuição final de pressões (figura 2.2 e) pouco se assemelha à disposição correspondente ao estado de empuxo ativo de Rankine.



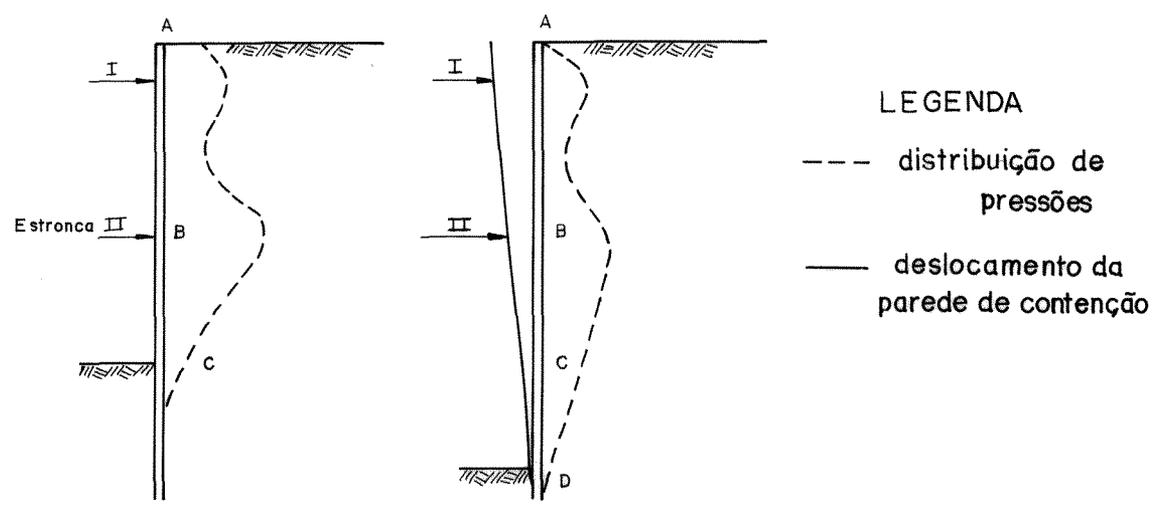
Fig. 2.1 - Distribuição típica de tensões numa escavação escorada



(a) escavação

(b) instalação do primeiro nível de estroncas

(c) etapa seguinte de escavação



(d) instalação do segundo nível de estroncas

(e) terceira etapa de escavação

LEGENDA

- distribuição de pressões
- deslocamento da parede de contenção

Fig. 2.2 - Desenvolvimento das pressões exercidas sobre a estrutura de suporte

O dimensionamento de escavações escoradas é normalmente feito através da utilização de diagramas de pressões aparentes de natureza semi-empírica. O comportamento real de escavações escoradas foi inicialmente reportado por Meem (1908) que verificou que as estroncas superiores de escavações em areia apresentavam carregamentos maiores do que as inferiores, contradizendo assim as hipóteses de Coulomb. Meem atribuiu este comportamento ao efeito de arqueamento.

Terzaghi (1941) propôs a distribuição de empuxo indicada na figura (2.3) a partir de observações de campo efetuados durante a construção do metropolitano da cidade de Berlim. Como se vê, este diagrama de pressões consiste num trapézio no qual a pressão máxima corresponde a uma magnitude  $0.8 K_a \gamma H$ , ou seja, 80% do valor máximo da lei triangular de Rankine. Neste

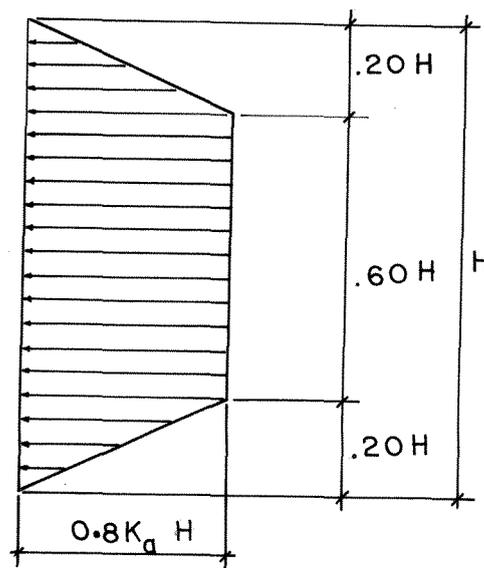
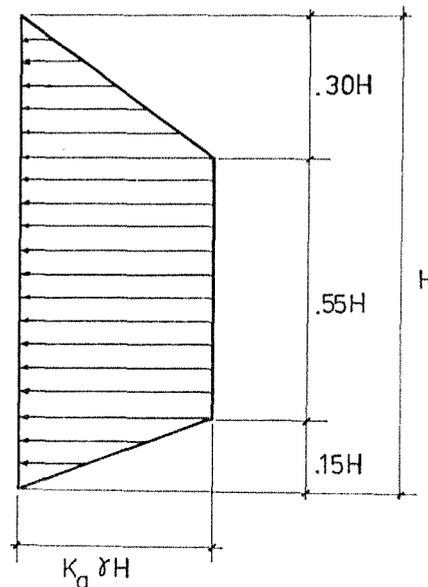


Fig. 2.3 - Diagrama de pressões aparentes proposto por Terzaghi (1941)

caso, o empuxo total será 30% superior ao fornecido pela teoria de Coulomb.

Peck (1941,1943) pesquisou o comportamento de solos coesivos durante a construção do metropolitano de Chicago, sugerindo a distribuição de pressões da figura (2.4). Nesta distribuição, o fator 1.2 foi estabelecido para compensar a dispersão dos resultados obtidos. O diagrama trapezoidal adotado tem como pressão máxima o valor  $\gamma H - 4 C_u$ , onde  $C_u$  é a resistência não-drenada do material.



$$K_a = 1.2 \left( 1 - \frac{4C_u}{\gamma H} \right)$$

Fig. 2.4 - Diagrama de pressões aparentes proposto por Peck

Terzaghi e Peck (1967) propuseram a distribuição de pressões aparentes representada na figura (2.5). A figura (2.5 a) representa a distribuição proposta para o caso de areias. No caso de argilas moles a médias (figura 2.5 b) foi

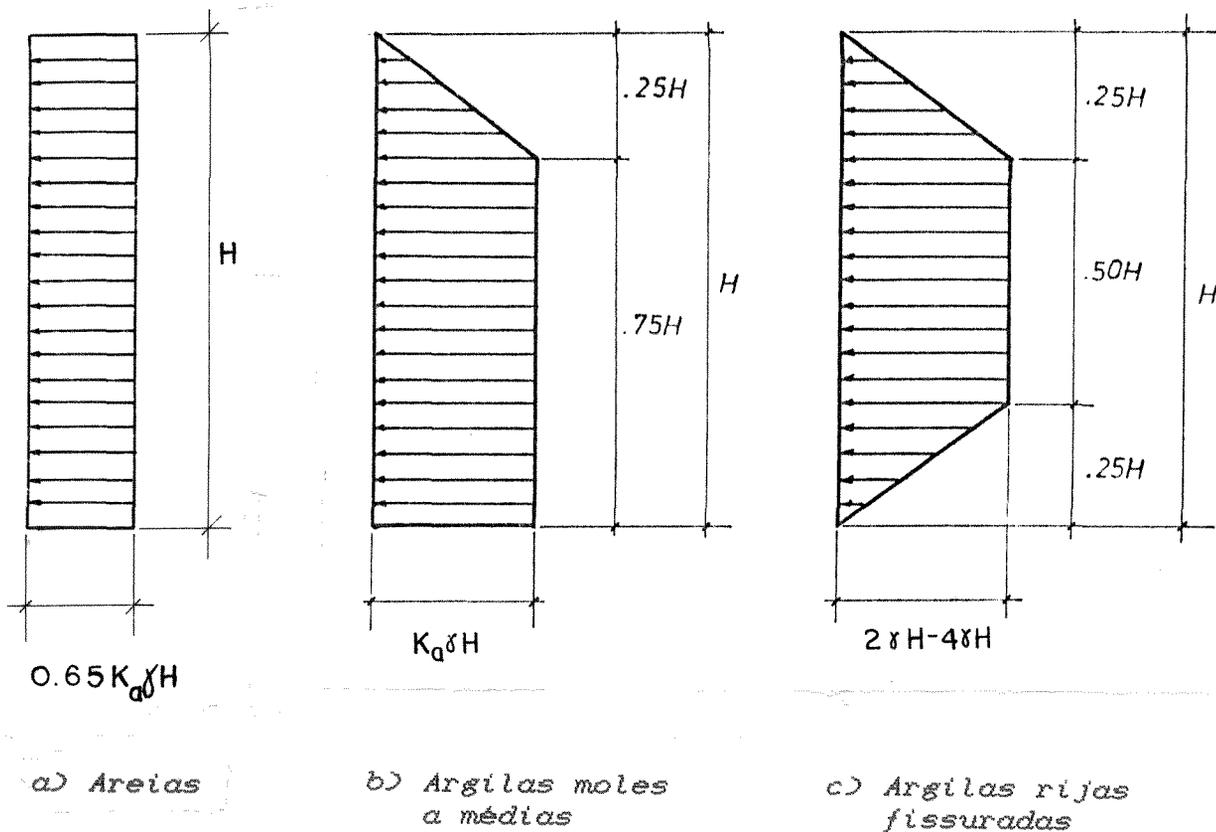


Fig. 2.5 - Diagrama de pressões aparentes proposto por Terzaghi e Peck (1967)

proposto um valor de  $K_a$  igual a:

$$K_a = 1 - \frac{m \cdot 4 \cdot C_u}{\gamma H} \quad (2.1)$$

onde  $m$  é um fator de redução empírico aplicado ao valor de  $C_u$ . O valor de  $m$  pode variar entre 0.4 e 1.0. Nas escavações das cidades de Oslo e do México, o valor de  $m$  considerado foi 0.4, já para as escavações efetuadas na cidade de Chicago o valor de  $m$  considerado foi 1.0. Para o caso de argilas rijas fissuradas Terzaghi e Peck (1967) propuseram uma outra distribuição indicada na figura (2.5 c) dado que a aplicação dos diagramas anteriores pode fornecer valores de pressão negativa. O empuxo nestes diagramas varia entre  $0.2 \gamma H$  e  $0.4 \gamma H$ , sendo que o valor mais baixo pode ser utilizado em

escavações que admitem deslocamentos pequenos e o tempo de construção é reduzido.

Armento (1972) monitorou o comportamento de uma escavação em uma argila arenosa rija em Oakland, Califórnia, propondo a distribuição da figura (2.6).

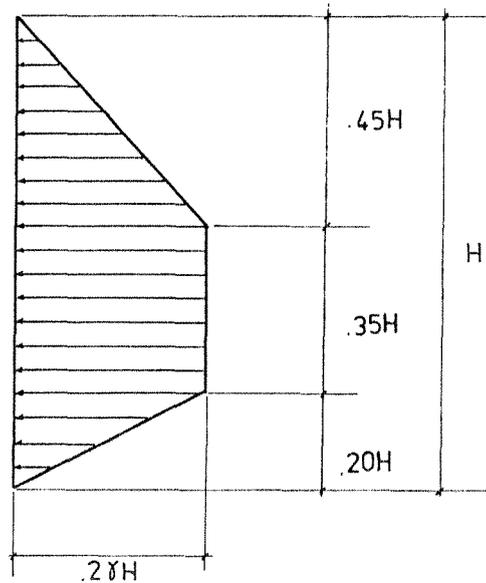


Fig. 2.6 - Diagrama de pressões aparentes proposto por Armento (1972)

Tschebotarioff (1973) propôs, para o caso de materiais argilosos, os diagramas de distribuição de pressões da figura (2.7) que apresentam uma distribuição diferente da recomendada pelos outros autores.

Todos estes diagramas de natureza semi-empírica são bastante conservadores por representarem, na realidade, a envoltória das pressões máximas observadas em diversos projetos de escavações escoradas o que conduz, geralmente, ao sobre-dimensionamento da estrutura de contenção.

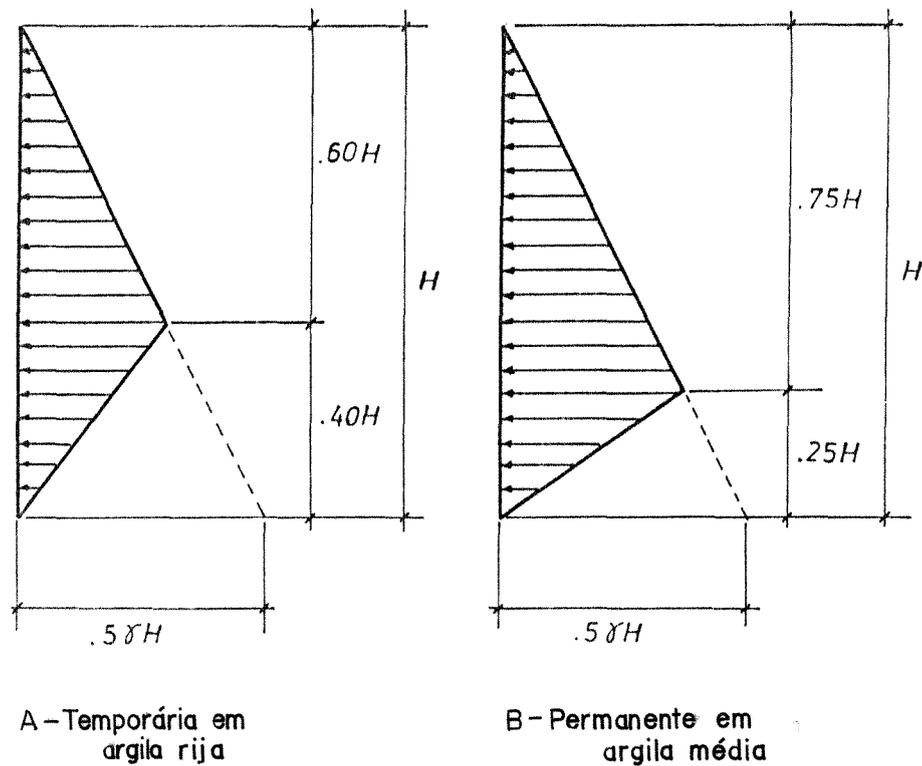


Fig. 2.7 - Diagrama de pressões aparentes proposto por Tschebotarioff para argilas

### 2.1.2 Deslocamentos Decorrentes da Escavação

Os movimentos da massa de solo adjacente à escavação e os deslocamentos da própria estrutura de contenção podem ter graves repercussões nas construções vizinhas. Assim, a previsão da magnitude e distribuição dos deslocamentos associados a um processo de escavação reveste-se de grande importância, já que permite definir as medidas preventivas necessárias que devam ser adotadas. No entanto, os métodos para previsão de deslocamentos não se encontram claramente estabelecidos e as previsões são normalmente baseadas em resultados fornecidos pela literatura para situações semelhantes.

Peck (1969), baseando-se em observações de campo forneceu as curvas adimensionais indicadas na figura (2.8) que permitem uma primeira estimativa dos recalques na adjacência de uma escavação escorada. A definição da magnitude dos recalques com a utilização destas curvas torna-se difícil pela imprecisão da terminologia utilizada para definição do solo e das características da obra.

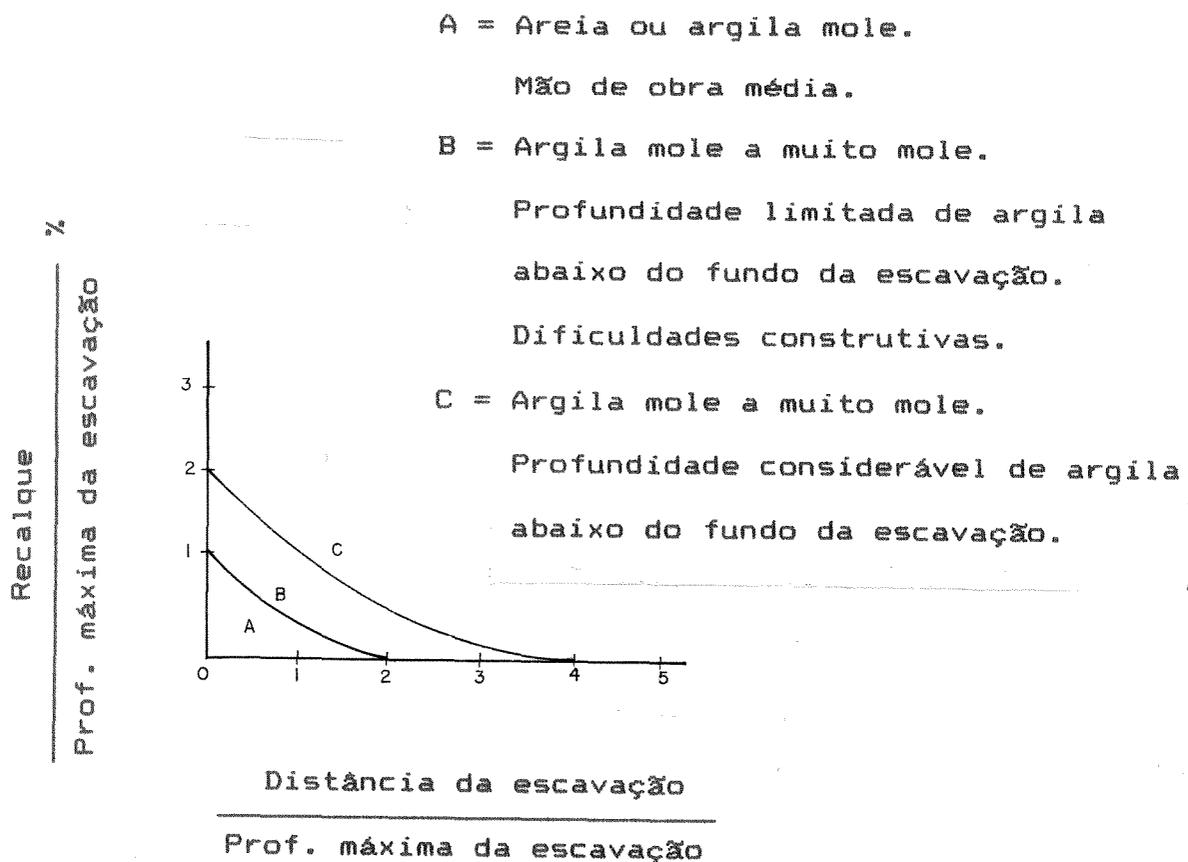


Fig. 2.8 - Critério empírico para determinação de recalques devido a escavações (Peck, 1969)

O uso do método dos elementos finitos constitui uma

ferramenta poderosa para a análise racional dos deslocamentos decorrentes do processo de escavação. Sua adequada utilização fornece meios para a avaliação das características particulares de cada escavação tais como o estado de tensão em que se encontra a massa de solo antes da escavação, as diversas etapas de execução da obra e as características de deformabilidade e resistência do solo. A revisão de algumas análises de escavações escoradas efetuadas com a utilização do método dos elementos finitos será apresentada na última seção do presente capítulo.

## **2.2 FUNDAMENTOS DO METODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

### **2.2.1 Introdução**

O método dos elementos finitos possui, atualmente, um grande número de aplicações. Utilizado inicialmente na engenharia estrutural, usa-se atualmente em áreas tais como fluxo de fluidos, eletricidade e magnetismo. Na engenharia geotécnica e, particularmente, na análise de escavações, este método fornece provavelmente a ferramenta mais poderosa para a análise das tensões e deslocamentos decorrentes da modificação do estado inicial de tensões na massa do solo como consequência da execução de uma obra geotécnica.

Numerosos livros fazem uma exaustiva abordagem do método dos elementos finitos de uma maneira geral dando, porém, uma maior ênfase às aplicações na engenharia estrutural (Hinton e

Owen, 1977; Zienkiewicz, 1979; Cook, 1981; Bathe, 1982). Um número menor de autores se refere à aplicação do método especificamente na área de Geotecnia (Desai e Christian, 1977; Naylor e Pande, 1981; Smith, 1982).

O método dos elementos finitos pode ser definido como um processo de aproximação de problemas do meio contínuo onde (Zienkiewicz, 1977) :

- (a) O meio contínuo é dividido em um número finito de partes (elementos), cujo comportamento é especificado através de um número finito de parâmetros e
- (b) A solução do sistema total, considerado como uma montagem dos seus elementos, segue as mesmas regras correspondentes a problemas de sistemas discretos.

Diferentes enfoques são possíveis na formulação do método. A abordagem feita inicialmente utilizou um enfoque intuitivo direto baseado numa generalização da análise matricial de estruturas reticuladas (Clough, 1960).

Os primeiros estudos de convergência mostraram que o método necessitava de um fundamento matemático maior. Percebeu-se então que o método podia ser abordado através da minimização de um funcional que, no caso do método dos deslocamentos, consistia na energia potencial total do sistema. O método foi considerado como uma generalização do método de Ritz, permitindo o seu uso em numerosas aplicações não-estruturais e dando um sustento teórico maior à formulação.

Este enfoque variacional possibilitou estudar matematicamente os requisitos de convergência.

Para certos problemas não existe o funcional correspondente. Nestes casos, o enfoque de resíduos ponderados pode ser utilizado. A metodologia consiste em minimizar o residual da equação diferencial do problema em estudo. Este residual pode ser construído de diversas maneiras, dentre estas, destaca-se o método de Galerkin.

A seguir, sem aprofundar nos detalhes da formulação, serão apresentados os conceitos básicos do método com o objetivo de explicitar a terminologia utilizada no presente trabalho.

### **2.2.2 Idealização do Meio Contínuo**

O ponto de partida da idealização consiste na subdivisão do meio contínuo em um número finito de elementos. O elemento quadrático isoparamétrico de oito nós foi escolhido para o programa de elementos finitos desenvolvido conjuntamente com esta tese. Este elemento foi selecionado devido à sua eficiência (Nayak and Zienkiewicz, 1972), a sua habilidade para representar contornos curvos e a sua capacidade de modelar corretamente o comportamento de flexão (Zienkiewicz, 1977). O elemento de barra de dois nós (Cook, 1981) foi implementado para poder simular escavações estroncadas ou atirantadas.

### 2.2.3 Funções de Interpolação

Estas funções definem a variação de certas magnitudes no elemento. Assim, na formulação do método aqui utilizada, as funções de interpolação permitirão caracterizar os valores correspondentes aos deslocamentos e às coordenadas de um ponto localizado no interior de um elemento em função dos valores definidos nos pontos nodais do mesmo. Seja  $Q$  o valor genérico de uma destas magnitudes num determinado ponto  $(x,y)$ , então:

$$Q = \sum_{i=1}^n N_i Q_i \quad (2.2)$$

$i = 1, 2, \dots, n$

onde  $n$  corresponde ao número de pontos nodais do elemento e  $N_i$  representa o valor da função de interpolação correspondente ao ponto nodal  $i$ . Desta forma, se os valores de  $Q_i$  correspondentes a cada ponto nodal forem conhecidos, o valor  $Q$  relativo a qualquer ponto no interior do elemento poderá ser determinado.

As funções de interpolação são definidas em termos das coordenadas curvilíneas  $\zeta$  e  $\eta$  que correspondem ao elemento "mapeado" segundo a figura (2.9) que ilustra o elemento isoparamétrico utilizado.

As funções de interpolação utilizadas são:

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \zeta \zeta_i) (1 + \eta \eta_i) (\zeta \zeta_i + \eta \eta_i - 1) \quad (2.3)$$

para  $i = 1, 3, 5, 7$

$$N_i = \frac{1}{2} (1 - \zeta^2) (1 + \eta \eta_i) \quad (2.4)$$

para  $i = 2, 6$

$$N_i = \frac{1}{2} (1 + \zeta \zeta_i) (1 - \eta^2) \quad (2.5)$$

para  $i = 4, 8$

onde, para  $i$  variando de 1 a 8, os valores correspondentes de  $\zeta_i$  e de  $\eta_i$  são:

$$\zeta_i = -1, 0, 1, 1, 1, 0, -1, -1$$

$$\eta_i = -1, -1, -1, 0, 1, 1, 1, 0$$

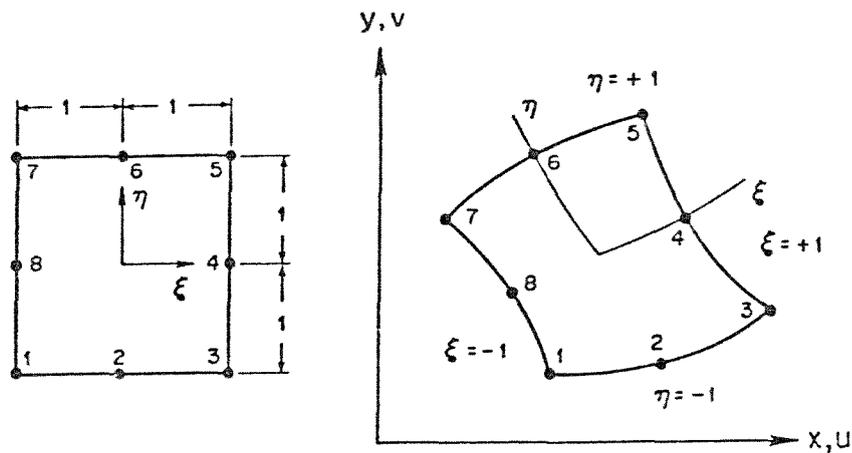


Fig. 2.9 - Elemento isoparamétrico de oito nós

#### 2.2.4 Transformação de Coordenadas

Na formulação de elementos finitos a ser utilizada, precisa-se de expressões para o incremento de área  $dA = dx \cdot dy$  em termos de  $d\xi$  e de  $d\eta$  e, por outro lado, das derivadas cartesianas das funções de interpolação, ou seja, de  $\partial N_i / \partial x$  e  $\partial N_i / \partial y$  em função de  $\partial N_i / \partial \xi$  e de  $\partial N_i / \partial \eta$ .

Seja  $dA$  a área do elemento original correspondente a  $d\xi \cdot d\eta$

depois do mapeamento do elemento (figura 2.10). Sejam {a} e {b} os vetores representativos dos lados da área infinitesimal  $dA$ . Estes vetores podem ser formulados em termos de  $d\xi$  e  $d\eta$ :

$$\{a\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot d\xi \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot d\xi \end{array} \right\} \quad (2.6 a)$$

$$\{b\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot d\eta \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot d\eta \end{array} \right\} \quad (2.6 b)$$

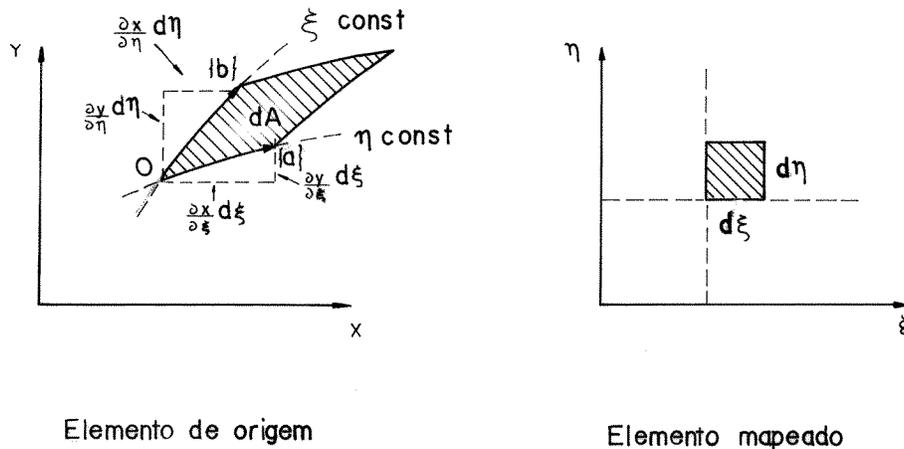


Fig. 2.10 - Transformação de área do elemento

Estas expressões foram obtidas como consequência de que {a} corresponde a uma linha  $\eta = \text{cte}$ , e portanto, as variações de  $x$  e  $y$  dependem apenas da coordenada  $\xi$ . Por outro lado, as variações de  $x$  e  $y$  ao longo da linha  $\xi = \text{cte}$  (vetor {b}) dependem somente da coordenada  $\eta$ .

A área  $dA$  corresponde à norma do produto vetorial de {a} e {b}. Assim:

$$dA = |J| d\xi d\eta \quad (2.7)$$

onde  $|J|$  é o determinante da matriz Jacobiana

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

As derivadas parciais ( $\partial x/\partial \zeta$ , etc.) poderão ser obtidas em termos das derivadas das funções de interpolação ( $\partial N_i/\partial \zeta$ , etc.) e das coordenadas dos pontos nodais, através da derivada da expressão geral (2.2). Ou seja:

$$\frac{\partial x}{\partial \zeta} = \sum \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \partial x_i, \text{ etc.} \quad (2.9)$$

A aplicação da regra da cadeia resulta em:

$$dN_i = \frac{\partial N_i}{\partial x} dx + \frac{\partial N_i}{\partial y} dy \quad (2.10)$$

Obtendo a derivada parcial de (2.10) em relação a  $\zeta$  e  $\eta$ , tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

onde a matriz Jacobiana aparece no segundo membro da equação. As derivadas cartesianas poderão ser obtidas por inversão da matriz Jacobiana:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

### 2.2.5 Relação Deformação - Deslocamento

Sejam  $u$  e  $v$  os deslocamentos segundo as direções  $x$  e  $y$ . No caso de deformação plana ( $\varepsilon_z = 0.0$ ), e considerando pequenas deformações (linearidade geométrica), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

Para o caso de uma análise axissimétrica, as relações serão:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{u}{x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

As deformações num ponto no interior do elemento podem ser relacionadas com os deslocamentos nos pontos nodais. Usando a equação (2.2) para expressar  $u$  e  $v$  em termos dos deslocamentos dos pontos nodais, define-se:

$$\{\varepsilon\} = [B] \{\delta^e\} \quad (2.14)$$

onde

$$\{\delta^e\} = [u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4, \dots, u_8, v_8]^T \quad (2.15)$$

é o vetor correspondente aos deslocamentos dos pontos nodais do elemento e

$$[B] = \left[ [B_1][B_2][B_3][B_4] \dots [B_8] \right] \quad (2.16)$$

representa a matriz deformação - deslocamento, na qual:

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

para o caso de deformação plana e

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{N_i}{x} & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

para o caso axissimétrico.

Visualiza-se agora a necessidade da obtenção das derivadas cartesianas das funções de interpolação efetuada previamente na seção 2.2.4.

### 2.2.6 Relação Tensão - Deformação

A relação entre o incremento de tensões e o incremento de deformações do material pode ser expresso sob a forma:

$$\{\Delta\sigma\} = [D] \{\Delta\varepsilon\} \quad (2.19)$$

onde  $[D]$  é a matriz tensão-deformação do material cujas componentes são de magnitude constante para problemas lineares e elásticos. Em problemas não-lineares estas constantes são

dependentes do estado de tensão ou de deformação (não-linearidade física).  $[D]$  é usualmente simétrica, porém, no caso de formulações elasto-plásticas definidas por uma lei de fluxo não-associada, esta matriz se torna não-simétrica.

A necessidade de uma correta caracterização do comportamento tensão-deformação do solo na análise dos deslocamentos causados por uma obra geotécnica em geral e particularmente, por uma obra de escavação, motivou a utilização do modelo elasto-plástico de Lade (1977,1979) neste trabalho. Este modelo constitutivo, caracterizado por uma lei de fluxo não-associada, será apresentado no capítulo 3 desta tese. A implementação em elementos finitos da matriz tensão-deformação correspondente a esta lei constitutiva e os métodos de resolução do problema não-linear decorrente, serão abordados posteriormente no capítulo 4.

### 2.2.7 A Matriz de Rigidez

A matriz de rigidez global que relaciona as forças aplicadas nos pontos nodais com os seus deslocamentos é obtida estabelecendo-se, em primeiro lugar, as matrizes de rigidez correspondentes a cada elemento. Posteriormente, efetua-se a montagem destas na matriz global cuja ordem correspondente ao número de graus de liberdade da malha.

Considere-se o elemento da figura (2.11). Este elemento se encontra em equilíbrio sob um conjunto de forças nodais  $\{F^{\circ}\}$ :

$$\{F^e\} = [F_{x1}, F_{y1}; F_{x2}, F_{y2}; \dots; F_{x8}, F_{y8}]^T \quad (2.20)$$

as quais estão associadas aos deslocamentos  $\{\delta^e\}$ , onde:

$$\{\delta^e\} = [u_1, v_1; u_2, v_2; \dots; u_8, v_8]^T \quad (2.21)$$

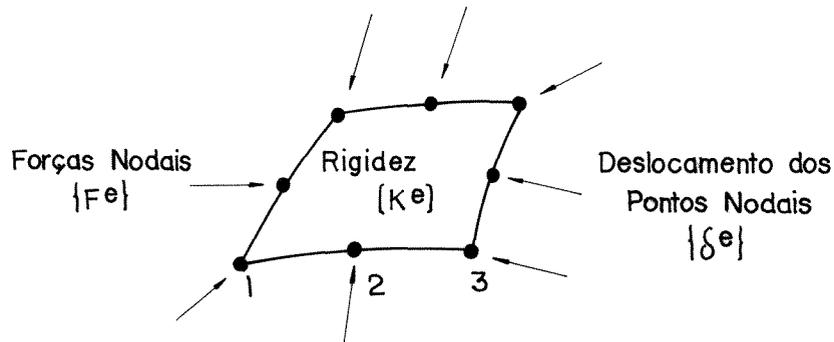


Fig. 2.11 - Elemento em estado de equilíbrio

Qualquer força externa é considerada na análise como sendo aplicada nos pontos nodais. Quando se tratar de forças concentradas, estas já devem estar diretamente aplicadas nos nós. Caso as forças sejam decorrentes da ação da gravidade ou consistam em forças distribuídas de superfície, são aplicadas nos pontos nodais forças equivalentes a estes carregamentos.

Considere-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais, onde um vetor de deslocamentos virtuais,  $\{\delta^*\}$ , é aplicado nos pontos nodais. Seja  $\{\sigma\}$  o valor da tensão num ponto do elemento e  $\{\epsilon^*\}$  a deformação correspondente aos deslocamentos virtuais. Igualando o trabalho desenvolvido externamente (nos pontos nodais) com o trabalho interno efetuado, tem-se:

$$\{\delta^*\}^T \{F^e\} = \int_{V^e} \{\varepsilon^*\}^T \{\sigma\} dV \quad (2.22)$$

onde  $V^e$  representa o volume do elemento.

Considerando a equação (2.14) tem-se:

$$\{\varepsilon^*\} = [B] \{\delta^*\} \quad (2.23)$$

e portanto,

$$\{\varepsilon^*\}^T = \{\delta^*\}^T [B]^T \quad (2.24)$$

Substituindo (2.24) em (2.22) e levando em consideração que o vetor de deslocamentos virtuais é arbitrário, obtém-se:

$$\{F^e\} = \int_{V^e} [B]^T \{\sigma\} dV \quad (2.25)$$

A expressão (2.25) constitui uma importante relação, utilizada sempre que se procure um conjunto de forças nodais equivalentes ao estado de tensões internas do elemento. Esta expressão será utilizada, por exemplo, para determinar as forças nodais equivalentes ao estado de tensões iniciais do problema. O processo de escavação a ser apresentado na seção seguinte fará uso particular desta relação.

Por outro lado, como o segundo membro da equação (2.25) representa o vetor das forças internas resistentes do elemento,  $\{F_I^e\}$ , equivalentes ao estado de tensão, outra importante aplicação desta expressão será feita no processo de resolução não-linear do problema. Efetivamente, ao longo do processo iterativo de resolução do problema, será calculada a diferença

existente entre os vetores das forças externas aplicadas ao elemento,  $\{F^e\}$ , e das forças internas resistentes calculadas,  $\{F_I^e\}$ .

A expressão (2.19) pode ser indicada como:

$$\{\sigma\} - \{\sigma_0\} = [D] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) \quad (2.26)$$

onde  $\{\sigma_0\}$  e  $\{\varepsilon_0\}$  representam o estado inicial de tensões e deformações respectivamente.

Substituindo a equação (2.14) na equação (2.26) e levando o resultado para a expressão (2.25) obtém-se:

$$\{F^e\} = \int_{V^e} [B]^T [D] [B] \{\delta^e\} dV + \int_{V^e} [B]^T \{\sigma_0\} dV - \int_{V^e} [B]^T [D] \{\varepsilon_0\} dV \quad (2.27)$$

Definindo os dois últimos termos de (2.27) como  $\{F_{\sigma_0}^e\}$  e  $\{F_{\varepsilon_0}^e\}$  respectivamente, resulta:

$$\{F^e\} = [K^e] \{\delta^e\} + \{F_{\sigma_0}^e\} - \{F_{\varepsilon_0}^e\} \quad (2.28)$$

onde

$$[K^e] = \int_{V^e} [B]^T [D] [B] dV \quad (2.29)$$

representa a matriz de rigidez do elemento.

Considerando:

$$\{R^e\} = \{F^e\} - \{F_{\sigma_0}^e\} + \{F_{\varepsilon_0}^e\} \quad (2.30)$$

a expressão (2.28) poderá ser expressa de forma concisa como:

$$[K^e] \{\delta^e\} = \{R^e\} \quad (2.31)$$

onde  $\{R^e\}$  representa o conjunto de forças nodais responsáveis pelos deslocamentos.

A expressão (2.31) constitui a equação de equilíbrio de um elemento. Uma expressão semelhante é obtida através da montagem das matrizes de rigidez de cada elemento na matriz de rigidez global do sistema (Zienkiewicz, 1977):

$$[K] \{\delta\} = \{R\} \quad (2.32)$$

onde as matrizes globais  $[K]$  e  $\{R\}$  são obtidas a partir das correspondentes matrizes de cada elemento. A resolução do sistema de equações (2.32) permitirá a obtenção do valor dos deslocamentos nos pontos nodais (seção 4.1).

### 2.2.8 Forças de Massa e de Superfície

#### *Forças de Massa*

Estas forças se encontram distribuídas no volume do elemento e, portanto, devem ser transformadas em forças nodais equivalentes. Nas aplicações geotécnicas as forças de massa surgem geralmente como consequência da ação da gravidade. Outro tipo de força de massa é a decorrente da aceleração centrífuga, tal como a que é gerada no ensaio executado numa centrífuga. As forças nodais obtidas formam parte do vetor  $\{R\}$  da equação (2.32).

Seja  $\{R^b\}$  a contribuição das forças de massa no vetor  $\{R\}$ . Definindo a intensidade da força de massa (força por unidade de volume) como:

$$\{\rho\} = \begin{Bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

e considerando o princípio dos trabalhos virtuais, tem-se que:

$$\{\delta^*\}^T \{R^{be}\} = \int_{V^e} (u^* \rho_x + v^* \rho_y) dV \quad (2.34)$$

Considerando a equação (2.2) para expressar  $u^*$  e  $v^*$  em termos dos deslocamentos dos pontos nodais, obtém-se:

$$\sum_{i=1}^n (R_{ix}^{be} u_i^* + R_{iy}^{be} v_i^*) = \int_{V^e} (\rho_x \sum_{i=1}^n N_i u_i^* + \rho_y \sum_{i=1}^n N_i v_i^*) dV \quad (2.35)$$

Novamente, ao considerar que o sistema de deslocamentos virtuais  $\{\delta^*\}$  (e portanto as suas componentes  $u_i^*$  e  $v_i^*$ ) é arbitrário, conclui-se que:

$$R_{ix}^{be} = \int_{V^e} \rho_x N_i dV \quad (2.36 a)$$

$$R_{iy}^{be} = \int_{V^e} \rho_y N_i dV \quad (2.36 b)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

onde  $n$  corresponde ao número de pontos nodais do elemento. Estas expressões serão utilizadas para determinar as forças nodais equivalentes às forças de massa de cada elemento.

### *Forças de Superfície*

Estas podem ser divididas em pressões  $P_n$  atuando na direção normal à superfície do elemento e tensões cisalhantes  $P_t$  atuando na direção tangencial ao longo da superfície do elemento. Estas forças distribuídas não são necessariamente

constantes, podendo variar ao longo da superfície do elemento. Como os elementos isoparamétricos utilizados são quadráticos, uma força distribuída de superfície de forma parabólica poderá ser considerada.

A convenção de sinal adotada define como positivo o valor de  $P_n$  quando este atua sob o elemento.  $P_t$  será positivo quando este atue no sentido anti-horário em torno do elemento. Assim, as forças de superfície consideradas na figura (2.12) são positivas de acordo com a convenção aqui adotada.

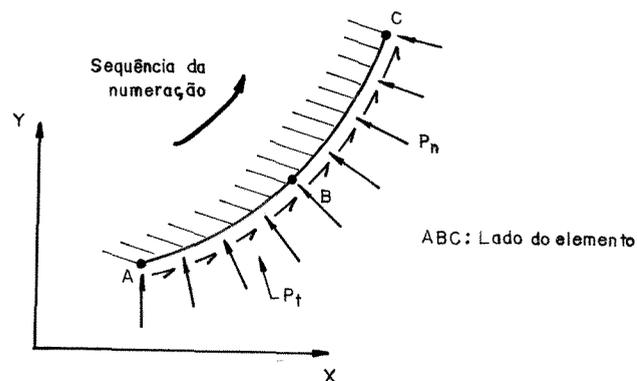


Fig. 2.12 - Forças distribuídas de superfície aplicadas no lado de um elemento

Aplicando novamente o Princípio dos Trabalhos Virtuais, desta vez, na superfície do elemento, obtem-se (Hinton and Owen, 1977):

$$R_{ix}^{so} = \int_{S^o} N_i \left( P_t \frac{\partial x}{\partial \xi} - P_n \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) d\xi \quad (2.37 a)$$

$$R_{iy}^{so} = \int_{S^o} N_i \left( P_n \frac{\partial x}{\partial \xi} - P_t \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) d\xi \quad (2.37 b)$$

$$i = 1, 2, \dots, k$$

onde  $S^e$  representa a superfície do elemento carregada pelas forças distribuídas e  $k$  corresponde ao número de pontos nodais do contorno do elemento carregado ( $k = 3$  no caso de elementos isoparamétricos de oito nós). A componente  $\{R^S\}$  das forças externas correspondente aos carregamentos de superfície será obtida a partir da contribuição  $\{R^{S^e}\}$  de todas as superfícies carregadas da malha de elementos finitos.

Todas as integrações utilizadas nas diversas expressões indicadas são efetuadas numericamente utilizando o esquema de quatro pontos de integração de Legendre-Gauss (Zienkiewicz, 1979; Cook, 1981).

## 2.3 SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ESCAVAÇÕES

### 2.3.1 Idealização do Problema

A malha de elementos finitos a ser utilizada na análise dependerá das características do problema. A escavação consistirá na análise de um meio semi-infinito e, portanto, os limites escolhidos para representar este meio deverão ser tais que a influência da escavação na região que fica além do domínio escolhido seja desprezível.

O problema de escavações escoradas ou atirantadas será abordado considerando uma condição de deformação plana. A maioria das escavações escoradas e atirantadas possuem um espaçamento suficientemente pequeno entre as escoras, o que

justifica a adoção desta condição (Tsui and Clough, 1974).

Outro aspecto importante da representação é a maneira em que serão simulados os elementos descontínuos da estrutura de contenção, tais como os perfis metálicos cravados, as escoras e os tirantes. Observou-se que a representação mais apropriada destes elementos estruturais consiste em considerar a rigidez flexional das estacas cravadas e a rigidez axial das estroncas e tirantes por unidade de comprimento (Tsui and Clough, 1974).

Os deslocamentos que ocorrem na interface entre o solo e a estrutura de contenção podem ser representados por elementos de junta, cujo comportamento é caracterizado através de ensaios de cisalhamento direto entre materiais da estrutura e do solo (Goodman et al, 1968; Mendes, 1988).

A sequência construtiva do processo de escavação deve ser simulada cuidadosamente. Os resultados obtidos através de uma análise efetuada em forma sequencial podem diferir substancialmente daqueles conseguidos considerando uma única etapa de construção. Isto não acontece somente no caso em que o material é considerado linear e elástico. Como os solos não se comportam desta maneira, o processo construtivo deverá levar em consideração as diversas etapas da escavação, a colocação e eventual aplicação de uma força de pré-tensão nas estroncas e/ou tirantes, o processo de re-aterro e a remoção das estroncas. Cada uma das etapas na sequência construtiva da escavação a ser analisada representará uma análise numérica

independente. Em cada uma destas análises por elementos finitos, o estado final da etapa analisada corresponderá ao estado inicial do estágio subsequente.

### 2.3.2 O Estado Inicial de Tensões

Na análise de todo problema não-linear, onde a matriz de rigidez é dependente do nível de tensões, a caracterização do estado inicial de tensões possui uma importância relevante.

As tensões iniciais poderão ser incorporadas na análise através de dois processos diferentes. O primeiro deles consiste em efetuar uma análise preliminar por elementos finitos que considere forças externas aplicadas devido à ação da gravidade. Na segunda metodologia o estado inicial de tensões será atribuído diretamente aos pontos de integração de Gauss.

Caso as forças de massa decorrentes do peso específico  $\gamma$  sejam aplicadas, tensões verticais  $\sigma_{y_0} = \gamma \cdot h$  serão geradas em cada ponto da malha, localizado a uma profundidade  $h$ , após uma análise preliminar por elementos finitos. Por sua vez, as tensões horizontais serão dependentes da lei constitutiva utilizada. Assim, se o material considerado fosse linear e elástico, se teria:

$$\sigma_{x_0} = \frac{\nu}{1-\nu} \gamma h \quad (2.38)$$

onde  $\nu$  corresponde ao coeficiente de Poisson do material. O valor de  $\sigma_{x_0}$  obtido desta maneira pode não corresponder exatamente ao valor da tensão horizontal estabelecida a partir

de relações empíricas.

A segunda metodologia, geralmente utilizada quando a superfície do terreno é horizontal, consiste em atribuir diretamente o valor das tensões iniciais em cada ponto de Gauss de integração em função da sua profundidade. Ou seja:

$$\sigma_{y_0} = \gamma h \quad (2.39 a)$$

$$\sigma_{x_0} = K_0 \sigma_{y_0} \quad (2.39 b)$$

$$\tau_{xy_0} = 0 \quad (2.39 c)$$

onde  $\sigma_{y_0}$ ,  $\sigma_{x_0}$ ,  $\tau_{xy_0}$  correspondem às tensões iniciais vertical, horizontal e de cisalhamento respectivamente,  $\gamma$  é o peso específico do material,  $h$  a profundidade do ponto desde a superfície do terreno e  $K_0$  representa o valor do coeficiente de empuxo lateral em repouso obtido através de relações empíricas.

Quando as tensões iniciais são atribuídas diretamente nos pontos de integração de Gauss, as forças nodais equivalentes ao estado de tensões iniciais deverão ser obtidas. A partir da equação (2.27) define-se, para cada elemento:

$$\{F_{\sigma_0}^e\} = \int_{V^e} [B]^T \{\sigma_0\} dV \quad (2.40)$$

O vetor das forças nodais equivalentes aqui definido, será utilizado no cálculo das forças residuais  $\{\psi\}$ , cuja determinação se tornará necessária durante o processo iterativo de resolução do problema (seção 4.3.1). Assim, se as tensões iniciais do problema em estudo forem definidas atribuindo os

valores correspondentes diretamente a cada ponto de Gauss, as forças residuais deverão ser então calculadas como:

$$\{\psi\} = \{R\} + \{F_{\sigma_0}\} - \{F_I\} \quad (2.41)$$

onde os dois primeiros termos do segundo membro caracterizam o vetor de forças externas do problema e  $\{F_I\}$  representa o vetor de forças internas obtido a partir da montagem dos vetores:

$$\{F_I^e\} = \int_{V^e} [B]^T \{\sigma\} dV \quad (2.42)$$

correspondentes a cada elemento.

Uma metodologia diferente das aqui apresentadas, baseada na aplicação de forças de gravidade no vetor de cargas externas pode ser também utilizada na caracterização do estado inicial de tensões (Naylor and Pande, 1981).

Caso a determinação do estado inicial de tensões na massa do solo seja efetuada utilizando as expressões (2.39 a) e (2.39 b), a principal dificuldade consistirá na caracterização do coeficiente de empuxo lateral em repouso  $K_0$ . Geralmente o valor de  $K_0$  é estimado utilizando correlações empíricas que o definem em função do índice de Plasticidade do material e da Relação de Sobreadensamento (Brooker and Ireland, 1965; Mayne and Kulhawy, 1982). A determinação do valor de  $K_0$  pode ser feita utilizando outros procedimentos específicos (Skempton, 1961; Kenney, 1967; Bjerrum and Anderson, 1972). Ensaios especiais de laboratório com trajetória de tensões  $K_0$  desenvolvidos em amostras indeformadas podem também fornecer informações relevantes.

### 2.3.3 O Processo de Escavação

A simulação numérica da escavação da região A (figura 2.13) consiste num processo efetuado em duas etapas (Desai and Christian, 1977; Azevedo, 1983):

- (a) Cálculo das forças que a região A, a ser escavada, exerce antes da escavação sobre a região B ao longo da linha de contato.
- (b) Análise da região B, que ficará depois da escavação, sob a ação de forças iguais às calculadas em (a), mas com direção oposta.

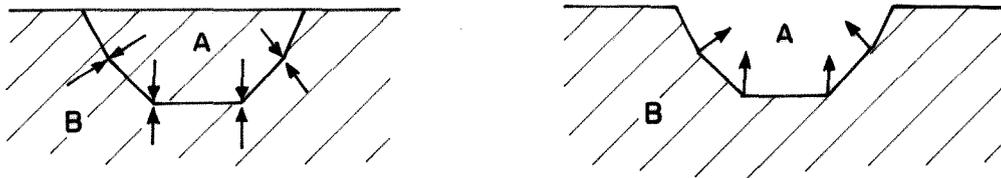


Fig. 2.13 - Simulação do processo de escavação

Os deslocamentos e deformações finais induzidos pela escavação são obtidos da análise (b), enquanto que as tensões finais são fornecidas pela soma das tensões iniciais obtidas em (a) mais o incremento de tensões calculado na etapa (b). Originam-se, desta forma, tensões nulas ao longo do contorno da região escavada.

Para o cálculo das tensões exercidas ao longo da linha de

contato entre as regiões A e B, foram propostas diversas metodologias. Clough and Duncan (1969) e Wong (1971) propuseram a utilização de polinômios para a interpolação das tensões no contorno da escavação. Chandrasekaran and King (1974) obtiveram as forças nodais equivalentes através do produto das matrizes de rigidez dos elementos adjacentes ao contorno da escavação e o incremento de deslocamentos gerados na etapa prévia do processo.

Nenhuma destas metodologias verificava a Condição de Unicidade (Christian and Wong, 1973) segundo a qual, a análise por elementos finitos de uma determinada escavação executada num material linear e elástico, deveria fornecer os mesmos resultados finais, qualquer que fosse o número de etapas de escavação utilizado no processo. A dificuldade no cálculo das tensões surgia como decorrência de que a formulação do método dos elementos finitos com base no método dos deslocamentos não garante o equilíbrio das tensões entre dois elementos adjacentes.

Mana (1978) propôs uma metodologia que satisfaz a Condição de Unicidade. O procedimento por ele apresentado consiste no cálculo direto das forças nodais equivalentes a partir da integração das tensões dos elementos adjacentes à escavação. Os erros gerados nas outras metodologias são eliminados em virtude de que a formulação por deslocamentos do método dos elementos finitos garante o equilíbrio das forças exercidas nos pontos nodais. As forças nodais equivalentes são calculadas como:

$$\{F\} = \sum_{m=1}^M \int_{V^e} [B]^T \{\sigma\} dV \quad (2.43)$$

onde  $M$  corresponde ao número de elementos escavados que compartilham um ponto nodal no contorno da escavação. A integral é calculada numericamente utilizando os valores  $\{\sigma\}$  e  $[B]$  nos pontos de Gauss de integração.

Esta metodologia, por causa da sua simplicidade e consistência, foi implementada no programa de elementos finitos desenvolvido neste trabalho.

Os elementos da região A (figura 2.13) devem ser eliminados da malha de elementos finitos antes de efetuar o cálculo correspondente à etapa (b) do processo de escavação. Muitos trabalhos têm sido efetuados pelo simples método de atribuir aos elementos escavados um valor de rigidez suficientemente baixo. Este procedimento, no entanto, apresenta duas deficiências. Em primeiro lugar, o número de graus de liberdade da malha de elementos finitos, que poderia ser diminuído, permanece constante, desperdiçando assim memória e tempo de processamento. Por outro lado, torna-se difícil definir um valor de rigidez que possa ser considerado desprezível em relação a elementos que, apesar de não escavados, podem ter valores bastante baixos de rigidez. Sendo assim, a remoção dos elementos da região escavada A e a consequente renumeração dos graus de liberdade na malha de elementos finitos foram consideradas mais apropriadas e implementadas no programa desenvolvido neste trabalho. A

renumeração dos graus de liberdade da malha foi também adotada no caso de acréscimo de elementos na malha de elementos finitos aos efeitos de simular a execução de um aterro.

## 2.4 REVISÃO DE ANÁLISES DE ESCAVAÇÕES EFETUADAS POR ELEMENTOS FINITOS

Efetuada inicialmente considerando o comportamento do solo como linear e elástico, a análise de escavações por elementos finitos tem progredido nestas duas últimas décadas tentando prever, de forma cada vez mais precisa, as tensões e deslocamentos decorrentes deste processo.

Na atualidade, esta análise numérica vem sendo utilizada na fase de projeto de obras de escavação, permitindo a obtenção de informações relevantes e tornando o método uma importante ferramenta da prática da engenharia. Por outro lado, o método dos elementos finitos tem sido usado em um grande número de trabalhos de pesquisa, os quais têm fornecido uma maior compreensão dos mecanismos envolvidos num processo de escavação.

Uma das primeiras aplicações do método na engenharia geotécnica foi apresentada por Morgenstern e Eisenstein (1970) que estudaram o empuxo exercido sobre as estruturas de contenção através de análises lineares e elásticas. Demonstrou-se numericamente a diferença existente entre a distribuição calculada de pressões na parede da escavação e a

disposição correspondente ao estado de repouso.

Duncan e Clough (1971) fizeram uma análise do comportamento da eclusa de Port Allen, no rio Mississippi, ao longo das diversas etapas da sua construção. A obra tinha sido exaustivamente instrumentada, o que forneceu a oportunidade de avaliar a adequabilidade do método dos elementos finitos na análise de problemas complexos de iteração solo-estrutura. O modelo hiperbólico foi utilizado para representar o comportamento do material. Obteve-se uma boa concordância entre os valores observados e os resultados numéricos obtidos.

Cole e Burland (1972) utilizaram o método dos elementos finitos para efetuar uma retro-análise do módulo de elasticidade na argila de Londres a partir da observação dos deslocamentos decorrentes de uma escavação efetuada com parede diafragma. Os valores obtidos foram utilizados para prever os deslocamentos de outras escavações nesta cidade. Observou-se que, com o aumento da profundidade, ocorria um concomitante aumento do módulo de elasticidade do material estudado.

Palmer e Kenney (1972) efetuaram uma análise paramétrica dos deslocamentos e empuxos exercidos sobre a estrutura de contenção de uma escavação realizada para o Metropolitano de Oslo. Um modelo bilinear foi utilizado para representar o comportamento tensão-deformação da argila escavada. Concluiu-se que a rigidez do solo, da parede e das estroncas são os parâmetros que exercem maior influência nos resultados finais

obtidos.

Bjerrum et al (1972) efetuaram uma análise por elementos finitos de outra seção de escavação escorada do Metropolitano de Oslo utilizando também o modelo bilinear. Os resultados obtidos mostravam uma boa concordância com o comportamento observado da escavação, sempre que as características de deformação e resistência do solo tivessem sido avaliadas corretamente.

Clough et al (1972) efetuaram duas análises de escavações atirantadas em um depósito de argila pré-adensada em Seattle. A análise por elementos finitos foi feita utilizando o modelo hiperbólico. A primeira análise, desenvolvida antes da execução da obra, serviu para avaliar o comportamento desta durante a sua construção. A segunda análise, efetuada após a execução, mostrou a relevância de uma correta caracterização da sequência de construção na análise numérica.

A adequabilidade do uso de uma análise bi-dimensional para o estudo de escavações com estruturas de contenção flexíveis (tais como cortinas de estacas pranchas ou perfis metálicos cravados com revestimento de madeira) foi pesquisada por Tsui e Clough (1974). Verificou-se que uma análise considerando o estado de deformação plana adapta-se bem para a previsão dos deslocamentos horizontais das estacas cravadas, porém, podem ser sub-estimados os deslocamentos do solo entre dois perfis consecutivos da escavação.

Clough e Tsui (1974) utilizaram o método dos elementos finitos para fazer uma análise comparativa entre o comportamento de escavações escoradas e escavações atirantadas. Observou-se que os deslocamentos nestes dois tipos de obras são fortemente dependentes do tempo de instalação e da magnitude da força de pré-tensão. Não foi verificada nenhuma tendência ao desenvolvimento de maiores deslocamentos de uma destas metodologias construtivas em relação à outra.

Clough e Mana (1976) desenvolveram a análise por elementos finitos de uma escavação escorada executada em San Francisco numa argila mole. Um estudo paramétrico foi efetuado posteriormente com o objetivo de determinar os parâmetros do material que melhor representavam o comportamento da escavação. A argila foi representada utilizando o modelo hiperbólico e um modelo elasto-plástico com a superfície de plastificação de Von-Misses. Os dois modelos utilizados apresentaram resultados semelhantes mostrando uma boa concordância com os deslocamentos observados.

Noli (1980) efetuou uma análise paramétrica considerando o modelo linear e elástico visando representar o comportamento observado de uma escavação experimental a céu aberto levada até a ruptura. Nesta escavação, efetuada num depósito de argila orgânica próximo da cidade de Rio de Janeiro, foram monitorados tanto os recalques superficiais quanto os deslocamentos na massa do solo. Deslocamentos horizontais foram também

observados por meio de inclinômetros. Concluiu-se que o modelo linear elástico conseguia apenas representar a componente vertical dos deslocamentos observados nas primeiras etapas do processo de escavação.

Pontes e Medeiros (1982) analisaram a escavação experimental de Sarapuí próxima da cidade do Rio de Janeiro. Foi utilizado o modelo hiperbólico calibrado com resultados de ensaios executados com diferentes trajetórias de tensões. Uma vasta instrumentação forneceu as observações de campo. Foi obtida uma boa concordância entre os resultados numéricos obtidos na análise e os recalque superficiais e deslocamentos horizontais fornecidos pela instrumentação de campo.

Eisenstein e Medeiros (1983) efetuaram a análise do comportamento de uma escavação escorada profunda executada no depósito glacial da cidade de Edmonton. Efetuaram-se medições de campo correspondentes aos deslocamentos horizontais, recalques superficiais e forças exercidas pelas componentes horizontais da estrutura de contenção. Diversos modelos constitutivos foram utilizados para representar o comportamento do material: o modelo elástico linear e a lei hiperbólica, sendo que esta última foi calibrada por meio de ensaios triaxiais considerando diversas trajetórias de tensões e utilizando ensaios de deformação plana. A análise por elementos finitos utilizando os parâmetros correspondentes aos ensaios de deformação plana foi a que melhor representou os deslocamentos horizontais observados na estrutura de contenção. A

distribuição do empuxo lateral resultante da análise mostrou um grande afastamento dos diagramas semi-empíricos usualmente utilizados na prática da engenharia.

Matos Fernandes (1983) analisou duas escavações executadas em Lisboa utilizando o método dos elementos finitos e o modelo hiperbólico para representar o comportamento mecânico do solo. O primeiro caso estudado consistiu numa parede mono-ancorada onde as condições particulares do problema eram favoráveis para a simulação numérica. A concordância entre os resultados analíticos e os valores observados foi muito boa. No segundo estudo, uma escavação escorada profunda foi analisada desde a primeira etapa da escavação até o estágio final da obra consistente na substituição gradual das estroncas pelas lajes dos pisos enterrados. Ressaltaram-se a diferença observada entre a rigidez teórica das estroncas e a rigidez efetiva de serviço, bem como a dificuldade de caracterização dos parâmetros do solo.

Monnet et al (1985) efetuaram comparações entre o comportamento observado da parede de diafragma instrumentada de uma escavação e os resultados analíticos obtidos utilizando a teoria de Winkler bem como o método dos elementos finitos considerando uma lei elasto-plástica para a modelagem do solo. Concluiu-se que as diferenças obtidas entre a teoria de Winkler e os resultados observados surgiam como decorrência da não consideração do comportamento da interface entre o solo e a parede. O método dos elementos finitos forneceu uma boa

concordância com as observações.

Hata et al (1985) analisaram o comportamento de uma parede diafragma ancorada executada durante a construção de uma estação de bombeamento próxima de Yokohama. Foi utilizada uma lei constitutiva elasto-plástica na análise por elementos finitos para representar o comportamento tensão-deformação do material. Os resultados numéricos obtidos foram comparados com os valores monitorados durante a escavação. Observou-se uma concordância razoável com os valores de campo observados.

Azevedo (1986a) pesquisou a adequabilidade do modelo elasto-plástico de Lade (1977) para representar o comportamento de escavações não-escoradas a céu aberto em areia. Foram também utilizados os modelos linear elástico e hiperbólico para caracterizar o material utilizado. Obtiveram-se resultados experimentais através de uma modelagem física do processo de escavação simulado numa centrífuga. Estes resultados experimentais foram posteriormente comparados com os valores obtidos numericamente. A análise efetuada por elementos finitos mostrou a maior adequabilidade do modelo de Lade para reproduzir os resultados experimentais observados na centrífuga.

Broms et al (1986) apresentaram a análise de três escavações escoradas executadas em Singapura. Os carregamentos nas estacas, os deslocamentos da parede e os recalques superficiais calculados através do método dos elementos finitos

foram comparados com as observações de campo. Destacou-se a necessidade de uma correta determinação dos parâmetros do material nas análises efetuadas, que foram desenvolvidas utilizando o modelo hiperbólico para simular o comportamento do solo.

Cardoso (1986) apresentou um modelo numérico desenvolvido para analisar o comportamento de pregagens (pequenos tirantes) utilizadas na estrutura de contenção de escavações. As trajetórias de tensões induzidas no solo como consequência deste tipo de obra foram analisados cuidadosamente. O modelo foi posteriormente utilizado na análise de uma escavação executada em solo residual na cidade do Porto.

Mendes (1988) efetuou um estudo paramétrico de escavações escoradas com o propósito de avaliar a influência nos resultados obtidos da interface entre o solo e a estrutura de contenção. O comportamento desta interface, simulada através de elementos de junta, foi obtido por meio de uma extensa série de ensaios de cisalhamento direto desenvolvidos na fase experimental do trabalho. Observou-se que a simulação da interface solo-estrutura de contenção produzia um acréscimo dos recalques na superfície do terreno adjacente à escavação. Não foram apreciadas diferenças significativas nos resultados como consequência da variação do tipo de junta utilizado.

Leite, Diniz e Bigarella (1988) desenvolveram um estudo por elementos finitos de três escavações executadas utilizando

parede diafragma. O primeiro caso analisado consistia numa parede em balanço com ficha em argila mole. O comportamento previsto pela análise por elementos finitos mostrou uma boa concordância com os dados obtidos do acompanhamento da obra por instrumentação. As outras obras consistiam em duas escavações escoradas onde o objetivo principal do estudo foi avaliar os recalques de uma edificação próxima da parede da escavação. Os resultados numéricos obtidos forneceram importantes informações na avaliação da estabilidade destes casos. Cabe aqui acrescentar que estas duas últimas escavações foram executadas numa região cujo perfil geotécnico possui características semelhantes ao da análise a ser apresentada no capítulo 7 do presente trabalho.

Azevedo e Santos (1988) pesquisaram o comportamento de uma escavação executada durante a construção do metrô do Rio de Janeiro. A informação de laboratório em relação à deformabilidade do material era insuficiente para uma correta modelagem analítica. Foram, então, utilizados módulos de deformabilidade obtidos através de correlações com resultados de ensaios de penetração estática (SPT) disponíveis, o que é, sem dúvida, bastante questionável. Mesmo assim, a análise por elementos finitos, apesar de não reproduzir corretamente os recalques observados, conseguiu fornecer informações que permitiram justificar algumas danificações ocorridas em edificações vizinhas à escavação durante a execução da obra.

Zornberg e Azevedo (1988) apresentaram os resultados

obtidos da análise por elementos finitos de uma escavação não-escorada a céu aberto que atinge o estado de ruptura. O modelo elasto-plástico de Lade foi utilizado para representar o comportamento tensão-deformação do solo sem coesão escavado. A superfície teórica de ruptura obtida com base nos conceitos de equilíbrio limite mostrou uma clara concordância com a cunha de ruptura caracterizada pela análise numérica. No capítulo 6 desta tese serão apresentadas a análise deste caso de ruptura e as conclusões decorrentes deste estudo.

Azevedo e Consoli (1988) analisaram o comportamento da escavação experimental previamente estudada por Pontes e Medeiros (1982). Desta vez, ao invés de assumir um comportamento não-drenado durante a execução da obra, utilizou-se a teoria acoplada de adensamento de Biot. A deformabilidade do material foi simulada através de parâmetros efetivos correspondentes aos modelos linear elástico, hiperbólico e elasto-plástico Cam-Clay Modificado. Os valores monitorados do perfil de recalque, deslocamentos horizontais e pressões neutras mostraram uma boa concordância com os valores obtidos numericamente, e em particular, com os resultados fornecidos pela análise utilizando o modelo elasto-plástico.

Lee et al (1989) analisaram por elementos finitos uma escavação escorada executada em Singapura. O modelo Cam-Clay foi utilizado para representar o comportamento do material. Os deslocamentos horizontais da cortina de estacas prancha utilizada como estrutura de contenção foram obtidos através da

instrumentação da obra e mostraram uma tendência semelhante aos resultados obtidos numericamente. Quantitativamente, estes resultados numéricos subestimaram o deslocamento lateral máximo e as cargas aplicadas nas estroncas. Por outro lado, os deslocamentos da base da parede e o levantamento de fundo foram superestimados.

Na revisão bibliográfica efetuada, referente à utilização do método dos elementos finitos para a análise de escavações a céu aberto e, particularmente, de escavações escoradas, observa-se que a grande maioria dos estudos foi feita considerando modelos elásticos (lineares ou não) para representar as características tensão-deformação do solo. Constata-se também que a maioria dos autores considera a correta simulação do comportamento do material como uma tarefa de difícil avaliação, porém, de fundamental influência nos resultados finais a serem obtidos da análise. Como consequência, no presente trabalho, concede-se uma especial relevância à caracterização do comportamento do solo, o qual será modelado utilizando a lei elasto-plástica de Lade (1977,1979).

A simulação adequada do comportamento do material, conjuntamente com uma representação apropriada das diferentes etapas construtivas correspondentes a uma obra de escavação poderão fornecer informações relevantes para o projeto e análise deste tipo de obra geotécnica.

## CAPÍTULO 3

### O MODELO ELASTO-PLÁSTICO DE LADE

#### 3.1 INTRODUÇÃO

Nos modelos elasto-plásticos, os incrementos de deformação são divididos em partes elásticas e plásticas, sendo a parte elástica relacionada linearmente com o incremento de tensões. O incremento de deformação plástica é definido através de uma função de plastificação e de uma função potencial plástico. A primeira destas funções estabelece o nível de tensões no qual acontecerão os incrementos de deformação plástica e a segunda define a relação entre os diversos componentes (mas não a magnitude) dos incrementos de deformação ao longo do fluxo plástico. A magnitude da deformação plástica é determinada a partir da lei de endurecimento. As funções potencial plástico e de plastificação têm sido frequentemente consideradas idênticas, em cujo caso o fluxo plástico é denominado associado. Porém, resultados de ensaios de laboratório

(Poorooshasb, Holubec and Sherbourne, 1966; Lade and Duncan, 1973; Lade, Nelson and Ito, 1987) têm demonstrado que os materiais geológicos não apresentam um comportamento plástico caracterizado por uma lei de fluxo associada, sendo a função potencial plástico diferente da de plastificação (fluxo não-associado).

Um modelo elasto-plástico desenvolvido para representar as diversas características do comportamento de solos não-coesivos foi proposto por Lade e Duncan (1975). Este modelo, baseado nas teorias da elasticidade e da plasticidade, considerava os resultados obtidos a partir de ensaios triaxiais cúbicos e convencionais executados em materiais não-coesivos (Lade, 1972; Lade and Duncan, 1973). Esta primeira versão do modelo considerava uma única superfície de plastificação. Os parâmetros necessários eram obtidos apenas a partir de ensaios de compressão triaxial convencionais.

Posteriormente, Lade (1977), ampliou as possibilidades do modelo original permitindo a existência de deformações plásticas durante carregamentos proporcionais ( $\sigma_1/\sigma_3 = cte$ ). Estas deformações foram caracterizadas através da existência de uma segunda superfície de plastificação. Além disso, aspectos tais como a curvatura da envoltória de resistência e o comportamento pós-pico do material foram levadas em consideração nesta nova versão do modelo. A teoria é aplicável para materiais não-coesivos em condições gerais (tridimensionais) de tensão, porém, os parâmetros necessários

para caracterizar o comportamento do solo podem ser obtidos considerando apenas os resultados de ensaios de compressão hidrostática e de testes drenados de compressão triaxial convencionais. Este modelo, a ser apresentado na seção 3.3, foi implementado no presente trabalho para caracterizar o comportamento tensão-deformação de areias.

O comportamento de argilas normalmente adensadas observado em laboratório é semelhante ao de solos não-coesivos, desde que os resultados dos ensaios sejam interpretados em termos de tensões efetivas. Em consequência, a mesma estrutura básica do modelo desenvolvido para areias pode ser utilizada para caracterizar o comportamento de argilas. Assim, a teoria elasto-plástica desenvolvida inicialmente para solos não-coesivos foi generalizada para modelar, em termos de tensões efetivas, as características tensão-deformação de argilas normalmente adensadas (Lade, 1979). Foram necessárias algumas modificações, basicamente no que diz respeito à compressibilidade do material durante carregamentos hidrostáticos. As características da formulação do modelo de Lade implementado no programa para modelagem de argilas serão apresentadas na seção 3.4.

Os modelos utilizados neste trabalho para representar o comportamento tensão-deformação do solo baseiam-se na utilização simultânea de duas superfícies de plastificação, uma delas caracterizada por uma lei de fluxo associada e a outra definida através de uma lei não-associada.

Um modelo baseado na utilização de uma única superfície de plastificação e de uma lei de fluxo não-associada foi recentemente desenvolvido (Kim and Lade, 1988; Lade and Kim, 1988a; Lade and Kim, 1988b). O novo modelo possui em comum com a teoria desenvolvida anteriormente as formulações correspondentes às deformações elásticas e ao critério de ruptura do material. A nova formulação utiliza uma única superfície de plastificação com endurecimento isotrópico que corresponde, por sua vez, aos pontos de igual trabalho plástico desenvolvido pelo material. À medida que o trabalho plástico aumenta, a superfície de plastificação expande até que o ponto considerado atinge a superfície de ruptura. Após a ruptura do material, a superfície de plastificação se contrai isotropicamente à medida que aumenta o trabalho plástico desenvolvido. Uma lei de fluxo não-associada é utilizada. Esta lei de fluxo é caracterizada por uma função potencial plástico que apresenta uma forma assimétrica no espaço das tensões principais.

O novo modelo apresenta a vantagem decorrente da utilização de uma única superfície de plastificação, o que produz uma maior facilidade na implementação numérica do modelo. Porém, o modelo anterior caracterizado por duas superfícies de plastificação, continua a representar com melhor precisão o comportamento do material, principalmente nas proximidades do eixo hidrostático (Lade and Pradel, 1989).

### 3.2 CONCEITOS BÁSICOS DA TEORIA DA PLASTICIDADE

#### 3.2.1 Comportamento Característico dos Materiais

Tensões e deformações são originadas em todo corpo submetido a um carregamento externo. Quando este carregamento é removido, o corpo poderá ou não retornar à sua configuração inicial. No primeiro caso o material é denominado elástico. No segundo, trata-se de um material definido como inelástico ou plástico.

Observações experimentais têm mostrado que materiais tais como o aço se comportam elasticamente até um determinado nível de tensões. Uma curva tensão-deformação típica de um metal submetido a tração é apresentado na figura (3.1). Quando o carregamento é aplicado gradualmente, o material se comporta elasticamente até o ponto A, recuperando a sua configuração

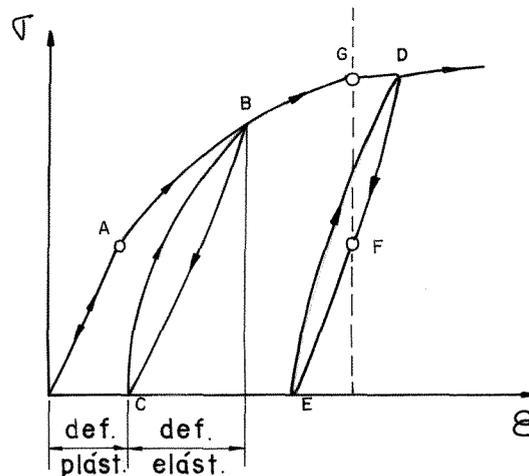


Fig. 3.1 - Curva tensão-deformação típica de um metal submetido a carregamento uniaxial

original se o carregamento for removido. Caso o nível de tensões ultrapasse o correspondente ao ponto *A* (ponto *B* da figura), surgirão deformações irrecuperáveis (ou plásticas) no corpo, observáveis durante um ciclo de descarregamento e recarregamento. Neste caso, o comportamento do material é definido como elasto-plástico e as deformações de qualquer ponto serão dependentes da história de tensões do material. Por exemplo, os pontos *F* e *G* representam diferentes estados de tensão para um mesmo estado de deformação.

A abordagem científica do estudo da plasticidade em metais teve sua origem, provavelmente, em 1864 com o trabalho iniciado por Tresca. Desde então, uma extensa literatura tem-se referido à teoria da plasticidade, às suas aplicações e aos modelos constitutivos que representam o comportamento elasto-plástico dos materiais. Cabe aqui destacar Hill (1950), Mendelson (1968) e Desai and Siriwardane (1984).

### 3.2.2 Critérios de Plastificação

O critério de plastificação pode ser definido como o estado de tensões que caracteriza o limite do comportamento elástico do material. Num problema uni-dimensional o critério de plastificação pode ser facilmente visualizado através de um determinado valor de tensão uni-axial. Porém, num estado multiaxial de tensões será necessária uma combinação de tensões para definir o critério de plastificação.

O critério de plastificação é definido por uma função escalar  $f$  que, no caso geral, será estabelecida em termos das seis componentes do tensor de tensões, ou seja:

$$f = f(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{13}) \quad (3.1)$$

Esta expressão pode ser igualmente definida em termos das tensões principais e das suas direções, ou seja:

$$f = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, n_1, n_2, n_3) \quad (3.2)$$

onde  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  são as tensões principais e  $n_1$ ,  $n_2$  e  $n_3$  são os seus correspondentes cossenos diretores. Finalmente, assumindo que o material é isotrópico, o critério de plastificação pode ser expresso apenas em termos das tensões principais:

$$f = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad (3.3)$$

No caso de um material que apresenta endurecimento isotrópico (Mendelson, 1968), duas hipóteses podem ser definidas para caracterizar o grau de endurecimento. A primeira assume que o endurecimento do material depende apenas do trabalho plástico total executado. De acordo com esta hipótese, o critério de plastificação poderá ser agora considerado como:

$$F = F(\{\sigma\}, W_{\text{plast}}) = f'(\{\sigma\}) - f''(W_{\text{plast}}) = 0 \quad (3.4)$$

O modelo de Lade considera este primeiro tipo de caracterização. A segunda hipótese considera que deformações plásticas  $\varepsilon^P$  constituem a medida do endurecimento do material. Neste caso, o critério de plastificação poderá ser indicado como:

$$F = F(\{\sigma\}, \varepsilon^P) = f'(\{\sigma\}) - f''(\varepsilon^P) = 0 \quad (3.5)$$

Estas duas hipóteses são definidas na literatura como hipótese de "Work hardening" e hipótese de "Strain hardening", respectivamente.

A função de plastificação define uma superfície no espaço das tensões principais. Se o material for perfeitamente plástico, as tensões permanecerão constantes após o escoamento e a superfície de plastificação continuará numa posição fixa. No entanto, caso o material seja encruável, a superfície de plastificação mudará à medida em que o material se deforme além do ponto de plastificação inicial.

Todo estado de tensão localizado no interior da superfície de plastificação será considerado de comportamento elástico. Por outro lado, se o estado de tensão atual corresponder a um ponto localizado sobre a superfície de plastificação, três casos serão possíveis para os materiais encruáveis:

$$(a) \quad dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma} d\sigma_{ij} > 0 \quad (3.6)$$

corresponde a um carregamento que produz simultaneamente deformações elásticas e plásticas.

$$(b) \quad dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma} d\sigma_{ij} = 0 \quad (3.7)$$

define um carregamento neutro que provoca apenas deformações elásticas. Evitam-se, desta forma, descontinuidades na curva tensão-deformação (Condição de Continuidade, Prager, 1949).

Finalmente, o caso:

$$(c) \quad dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma} d\sigma_{ij} < 0 \quad (3.8)$$

corresponde a um descarregamento e provoca somente deformações

elásticas no material. Não é possível a existência de pontos cujo estado de tensões se encontre localizado fora da superfície de plastificação.

### 3.2.3 Direção e Magnitude das Deformações Plásticas

O conceito de encruamento ou endurecimento foi definido por Drucker (1950) e estabelece que se um conjunto de forças externas for aplicado a um corpo submetido inicialmente a um dado estado de tensões  $e$ , após a remoção dessas forças o corpo permanecer em equilíbrio, então:

- (a) As forças externas realizam um trabalho positivo durante a aplicação  $e$ ,
- (b) o trabalho total desenvolvido num ciclo de aplicação e descarregamento das forças é positivo ou nulo.

Duas hipóteses adicionais são necessárias:

- (c) Existe uma função de plastificação.
- (d) Existe uma relação linear entre os incrementos infinitesimais de tensão e de deformação plástica.

As hipóteses acima mencionadas permitem formular a "lei de fluxo", segundo a qual (Mendelson, 1968):

$$\left\{ d\epsilon_p \right\} = d\lambda \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} \quad (3.9)$$

onde  $\{d\epsilon_p\}$  corresponde às deformações plásticas e  $d\lambda$  é uma constante que determina a magnitude destas deformações. A equação acima relaciona o incremento de deformação plástica com

o gradiente da função de plastificação. Deste modo, a direção do incremento de deformação plástica coincidirá com a normal à superfície de plastificação no ponto considerado e será independente do incremento de tensão.

A "Condição de Normalidade", como também é denominada a equação (3.9), não tem sido observada experimentalmente para diversos materiais. Foi então generalizado o conceito de lei de fluxo. Assim, estabelece-se a existência de uma função potencial plástico  $g$ , para a qual:

$$\left\{ d\varepsilon_p \right\} = d\lambda \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right\} \quad (3.10)$$

Quando as funções  $f$  e  $g$  são idênticas, a lei de fluxo correspondente é denominada associada. Caso contrário, a lei de fluxo decorrente será não-associada.

A constante  $d\lambda$  da equação (3.9) pode ser relacionada com o trabalho plástico,  $W_p$ , realizado durante a deformação do material. Assim:

$$dW_p = \{\sigma\}^T \{d\varepsilon_p\} \quad (3.11)$$

Considerando a lei de fluxo, teremos:

$$dW_p = \{\sigma\}^T \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right\} d\lambda \quad (3.12)$$

ou bem:

$$d\lambda = \frac{dW_p}{\{\sigma\}^T \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right\}} \quad (3.13)$$

com o qual a lei de fluxo poderá ser expressa em termos do

trabalho plástico:

$$\{d\varepsilon_p\} = \frac{dW_p}{\{\sigma\}^T \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right\}} \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right\} \quad (3.14)$$

### 3.3 UTILIZAÇÃO DO MODELO DE LADE EM AREIAS

#### 3.3.1 Componentes de Deformação

O modelo de Lade tem sido utilizado com sucesso na caracterização do comportamento tensão-deformação de solos não-coesivos (Lade and Duncan, 1975; Lade, 1977; Medeiros, 1979; Yong and Ko, 1980; Azevedo, 1983; Azevedo and Farias, 1987).

A formulação implementada neste trabalho para simular o comportamento de areias baseia-se na utilização de duas superfícies de plastificação (Lade, 1977), que permitem reproduzir qualquer trajetória no espaço das tensões principais, sendo apenas necessário um mínimo de três ensaios para a obtenção de todos os parâmetros deste modelo constitutivo. Dois destes ensaios correspondem a testes drenados de compressão triaxial com medição de variação volumétrica (um destes com ciclo de descarregamento e recarregamento). O outro ensaio consiste num teste de compressão hidrostática do material.

O incremento total de deformações é dividido em três

componentes:

$$\{d\varepsilon\} = \{d\varepsilon^e\} + \{d\varepsilon^c\} + \{d\varepsilon^p\} \quad (3.15)$$

As três parcelas da deformação total,  $\{d\varepsilon\}$ , são calculadas separadamente. A primeira,  $\{d\varepsilon^e\}$ , correspondente à deformação elástica e é determinada através da lei de Hooke. As outras duas componentes correspondem a deformações plásticas e requerem, portanto, a definição das correspondentes funções de plastificação, funções potencial plástico e leis de encruamento do material. A componente  $\{d\varepsilon^c\}$ , denominada colapsível, não controla a ruptura do material e é calculada através de uma lei de fluxo associada. A componente  $\{d\varepsilon^p\}$ , definida como deformação plástica expansiva, controla o estado de ruptura e é definida através de uma lei de fluxo não-associada.

A figura (3.2) apresenta esquematicamente as três componentes de deformação para um ensaio drenado de compressão triaxial convencional. Tanto as deformações elásticas quanto as deformações plásticas se desenvolvem desde o início do ensaio. As deformações plásticas, que inicialmente são de menor magnitude do que as elásticas, passam a ser a parcela dominante das deformações quando as tensões desviadoras são mais elevadas. As componentes de deformação elástica e plástica colapsível são sempre compressivas e, portanto, o comportamento dilatante do material será controlado apenas pela componente plástica expansiva.

As funções de plastificação e potencial plástico utilizados na determinação das deformações plásticas

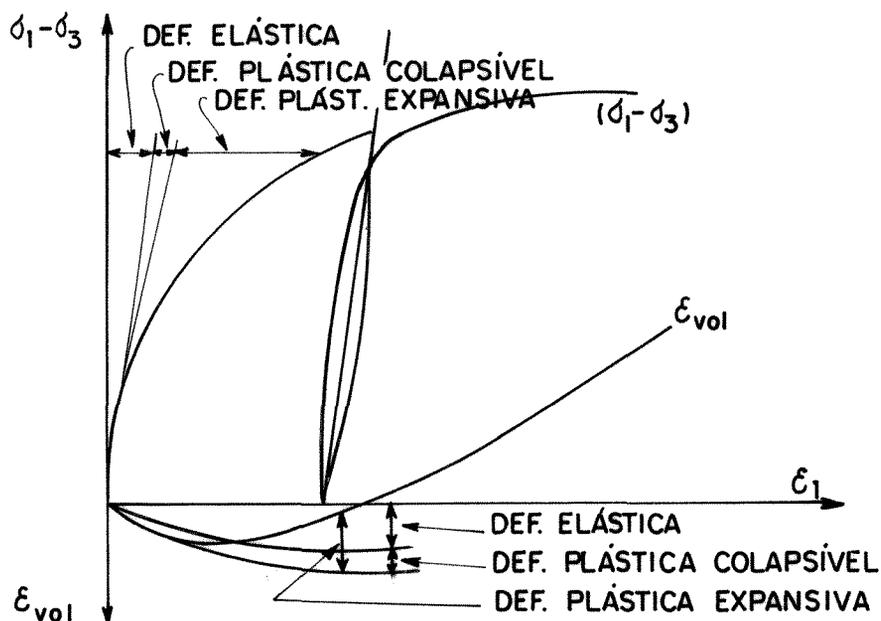


Fig. 3.2 - Componentes de deformação num ensaio drenado de compressão triaxial convencional

colapsíveis são representadas por uma superfície esférica com centro na origem do espaço das tensões principais. No caso das deformações plásticas expansivas, as funções de plastificação e de potencial plástico não são coincidentes, sendo representadas por duas superfícies cónicas diferentes cujos vértices se encontram na origem do espaço das tensões principais. A figura (3.3) mostra as superfícies de plastificação cônica e esférica utilizadas no modelo. A figura (3.4) mostra o processo de plastificação para um nível de tensões que passa de um estado inicial A a um estado final B. As deformações plásticas se encontram representadas no plano triaxial (Lade, 1980). As deformações elásticas não estão indicadas nesta figura.

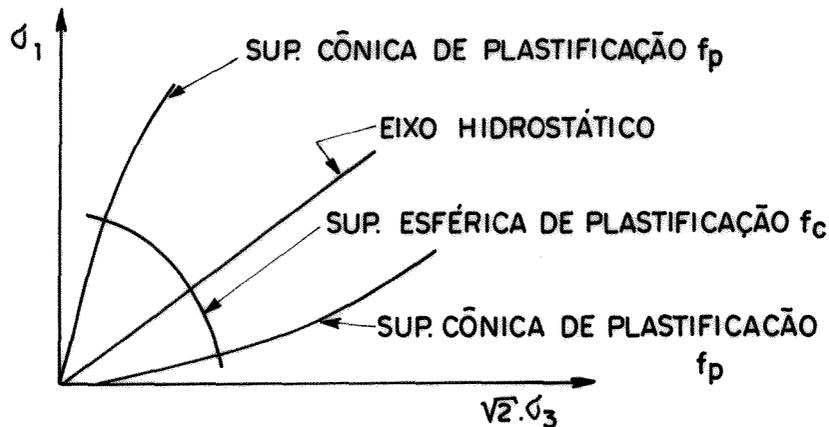


Fig. 3.3 - Localização das superfícies de plastificação

### 3.3.2 Deformações Elásticas

A componente de deformação elástica, recuperável após o descarregamento do material, é calculada através da lei de Hooke. O módulo de elasticidade utilizado para o descarregamento e recarregamento do material é definido pela relação:

$$E_{ur} = K_{ur} \rho a \left( \frac{\sigma_a}{\rho a} \right)^n \quad (3.16)$$

onde os parâmetros adimensionais  $K_{ur}$  e  $n$  são determinados a partir da curva de descarregamento de ensaios de compressão triaxial.  $\rho a$  corresponde à pressão atmosférica, expressa nas mesmas unidades que  $E_{ur}$  e  $\sigma_a$ .

O outro parâmetro necessário para definir as componentes elásticas de deformação, o coeficiente de Poisson  $\nu$ , é considerado de magnitude constante.

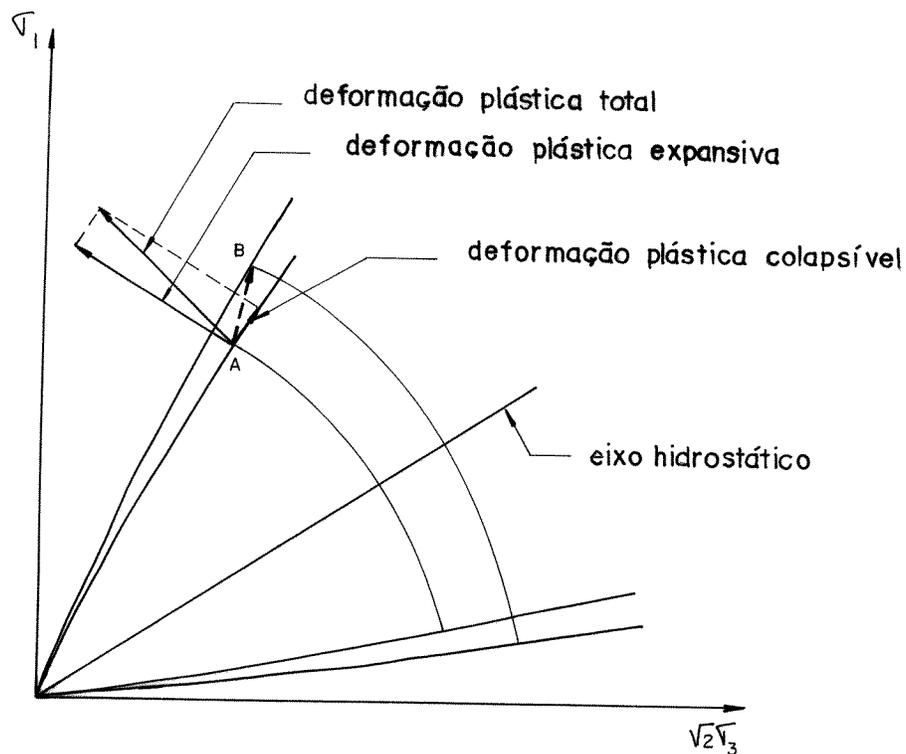


Fig. 3.4 - Processo de plastificação indicado no plano triaxial

### 3.3.3 Deformações Plásticas Colapsíveis

As deformações plásticas colapsíveis são calculadas utilizando a teoria da plasticidade considerando:

- (a) Uma superfície de plastificação esférica com centro na origem do espaço das tensões principais.
- (b) Uma lei de fluxo associada.
- (c) Uma lei de encruamento definida a partir de um ensaio de compressão hidrostática.

A função de plastificação,  $f_c$ , e a função potencial plástico,  $g_c$ , são idênticas, sendo caracterizadas pela expressão:

$$f_c = g_c = I_1^2 + 2 I_2 \quad (3.17)$$

onde  $I_1$  e  $I_2$  são o primeiro e o segundo invariante do tensor de tensões, definidos como:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (3.18)$$

e

$$\begin{aligned} I_2 &= -(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3) \\ &= \tau_{xy} \tau_{yx} + \tau_{yz} \tau_{zy} + \tau_{zx} \tau_{xz} - (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Fazendo-se as derivações necessárias e, levando em consideração que:

$$\{\sigma\}^T \left\{ \frac{\partial f_c}{\partial \sigma} \right\} = 2 f_c \quad (3.20)$$

a lei de fluxo para as deformações plásticas colapsíveis poderá ser representada pela expressão:

$$\begin{Bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\varepsilon_z \\ d\varepsilon_{xy} \\ d\varepsilon_{xz} \\ d\varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{dW_c}{f_c} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

onde  $dW_c$  é o incremento de trabalho plástico colapsível por unidade de volume para um determinado nível de tensão  $f_c$ , e para um incremento  $df_c$  na função de plastificação.

A relação inversa de  $f_c(W_c)$  é definida empiricamente pela expressão:

$$W_c(f_c) = c \, p a \left( \frac{f_c}{p a^2} \right)^p \quad (3.22)$$

onde  $c$  e  $p$  são parâmetros do material.

Assim, o valor do incremento do trabalho plástico colapsível, na equação (3.21) pode ser avaliado pela expressão:

$$dW_c = c \, p \, p a \left( \frac{p a^2}{f_c} \right)^{1-p} d \left( \frac{f_c}{p a^2} \right) \quad (3.23)$$

### 3.3.4 Deformações Plásticas Expansivas

A superfície de plastificação é expressa em termos do primeiro e do terceiro invariante do tensor de tensões:

$$f_p = \left[ \frac{I_1^3}{I_3} - 27 \right] \left[ \frac{I_1}{p a} \right]^m \quad (3.24)$$

sendo que:

$$f_p = \eta_1 \quad , \text{ na ruptura} \quad (3.25)$$

onde  $I_1$  corresponde ao primeiro invariante definido na equação (3.18) e  $I_3$  é o terceiro invariante definido por:

$$\begin{aligned} I_3 &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \\ &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} + \tau_{yx} \tau_{zy} \tau_{xz} \\ &\quad - ( \sigma_x \tau_{yz} \tau_{zy} + \sigma_y \tau_{zx} \tau_{xz} + \sigma_z \tau_{xy} \tau_{yx} ) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Os valores  $\eta_1$  e  $m$  são parâmetros do solo.

As superfícies correspondentes ao nível de tensões  $f_p$  definido por (3.24) são homotéticas à superfície de ruptura. O valor de  $f_p$  é nulo no eixo hidrostático e aumenta gradativamente até atingir o seu valor máximo  $f_{p_{\max}} = \eta_1$  na ruptura. A figura (3.5) mostra as superfícies cônicas de plastificação correspondentes às deformações plásticas expansivas. Na figura (3.5 a) observa-se um corte no plano triaxial. A figura (3.5 b) mostra a forma das superfícies num plano octaédrico.

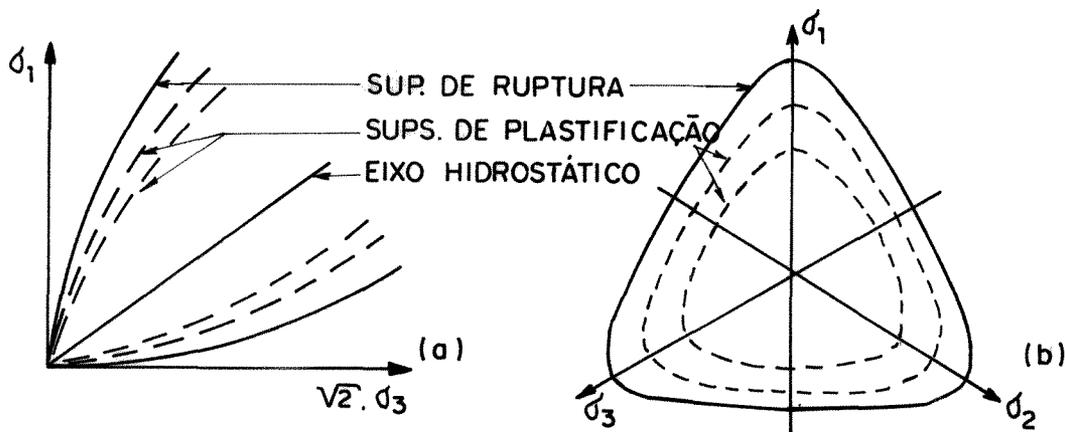


Fig. 3.5 - Superfície de plastificação expansiva e de ruptura.  
 a) Corte no plano triaxial  
 b) Corte no plano octaédrico

A não-associatividade da lei de fluxo correspondente às deformações plásticas expansivas implica na existência de uma função potencial plástico diferente da função de plastificação. O potencial plástico é definido pela seguinte expressão:

$$g_p = I_1^3 - \left[ 27 + \eta_2 \left[ \frac{p\alpha}{I_1} \right]^m \right] I_3 \quad (3.27)$$

onde  $\eta_2$  corresponde a uma magnitude constante para valores

dados de  $f_p$  e  $\sigma_3$ . Esta função potencial plástico, define superfícies no espaço das tensões principais cuja forma é semelhante à das superfícies de plastificação. No entanto, as superfícies do potencial plástico têm um ângulo maior na origem, são de maior curvatura e se tornam paralelas ao eixo hidrostático mais rapidamente do que as superfícies de plastificação (figura 3.6).

A relação entre  $\eta_2$  e  $f_p$  para um dado valor de  $\sigma_3$  é estabelecida empiricamente (Lade, 1977) pela expressão:

$$\eta_2 = S f_p + T \quad (3.28)$$

onde a inclinação  $S$  independe de  $\sigma_3$  e o intercepto  $T$  varia com a tensão confinante de acordo com a expressão:

$$T = t_1 + t_2 \sqrt{\frac{\sigma_3}{p\alpha}} \quad (3.29)$$

O valor da inclinação  $S$  nem sempre foi comprovado constante, independentemente da magnitude da tensão de confinamento. Azevedo (1983) propôs a seguinte relação:

$$S = s_1 + s_2 \sqrt{\frac{\sigma_3}{p\alpha}} \quad (3.30)$$

Deste modo, são necessários 4 parâmetros ( $s_1, s_2, t_1$  e  $t_2$ ) para definir a direção dos incrementos de deformação plástica expansiva.

Notando-se que:

$$\{\sigma\}^T \left\{ \frac{\partial g_p}{\partial \sigma} \right\} = 3 g_p + m \eta_2 \left( \frac{p\alpha}{I_1} \right)^m I_3 \quad (3.31)$$

obtem-se a relação correspondente à lei tensão-deformação que define as deformações plásticas expansivas:

$$\begin{pmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\varepsilon_z \\ d\varepsilon_{xy} \\ d\varepsilon_{xz} \\ d\varepsilon_{yz} \end{pmatrix} = \frac{dW_p}{3 \sigma_p + m \eta_2 \left( \frac{\rho a}{I_1} \right)^m I_3} \left\{ \left[ 27 + \eta_2 \left( \frac{\rho a}{I_1} \right)^m \right] \right\}. \quad (3.32)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_y \sigma_z - \tau_{yz}^2 \\ \sigma_x \sigma_z - \tau_{xz}^2 \\ \sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 \\ \sigma_x \tau_{yz} - \tau_{xy} \tau_{zx} \\ \sigma_y \tau_{zx} - \tau_{yz} \tau_{xy} \\ \sigma_z \tau_{xy} - \tau_{zx} \tau_{yz} \end{pmatrix} + \left\{ 3 I_1^2 + \frac{I_1^2}{I_1} m \eta_2 \left( \frac{\rho a}{I_1} \right)^m \right\} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

onde  $dW_p$  corresponde ao incremento do trabalho plástico expansivo para valores de  $f_p$  e de incrementos  $df_p$  dados.

A relação entre o nível de tensões  $f_p$  e o trabalho plástico expansivo  $W_p$  é dado pela seguinte expressão empírica (Lade, 1977):

$$f_p(W_p) = \alpha e^{-bW_p} \left( \frac{W_p}{\rho a} \right)^{1/q} \quad (3.33)$$

$$q > 0$$

onde  $e$  representa a base dos logaritmos naturais e  $\alpha$ ,  $b$ , e  $q$  correspondem a valores constantes para a tensão confinante  $\sigma_3$ . Estes parâmetros são calculados através das expressões:

$$a = \eta_1 \left( \frac{e \rho a}{W_{ppeak}} \right)^{1/q} \quad (3.34)$$

$$b = \frac{l}{q W_{ppeak}} \quad (3.35)$$

onde  $W_{ppeak}$  representa o trabalho plástico expansivo alcançado no estado de ruptura do material.  $W_{ppeak}$  se relaciona com a tensão confinante  $\sigma_3$  através da expressão:

$$W_{ppeak} = P \rho a \left( \frac{\sigma_3}{\rho a} \right)^l \quad (3.36)$$

sendo que o parâmetro  $q$  varia linearmente com  $\sigma_3$  segundo a relação:

$$q = \alpha + \beta \left( \frac{\sigma_3}{\rho a} \right) \quad (3.37)$$

Deste modo, são necessários 4 parâmetros ( $P$ ,  $l$ ,  $\alpha$  e  $\beta$ ) para definir a lei de endurecimento expansivo do solo.

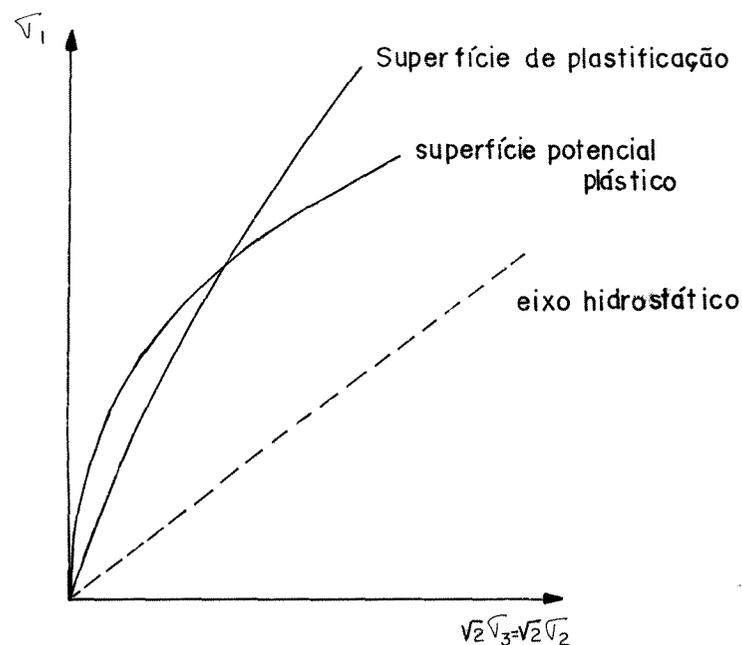


Fig. 3.6 - Superfícies de plastificação e potencial plástico expansivas

O incremento do trabalho plástico expansivo,  $dW_p$ , pode ser obtido a partir da equação (3.31):

$$dW_p = \frac{df_p}{f_p \left( \frac{1}{q W_p} \right)} \quad (3.38)$$

São portanto necessários um máximo de 15 parâmetros para definir o comportamento do material, segundo o modelo de Lade utilizado para a modelagem de areias neste trabalho. Deste valor total, 3 parâmetros correspondem às deformações elásticas, 2 deles definem as deformações plásticas colapsíveis e 10 parâmetros correspondem às deformações plásticas expansivas. Todos os parâmetros necessários são calculados a partir de ensaios drenados de compressão triaxial (CTC) e ensaios de compressão hidrostática (HC). O procedimento para calibração de materiais não-coesivos não será aqui especificado (ver Lade, 1977; Azevedo e Farias, 1986).

### 3.4 UTILIZAÇÃO DO MODELO DE LADE EM ARGILAS

O comportamento de argilas normalmente adensadas é semelhante ao de solos não-coesivos desde que os resultados de laboratório sejam interpretados em termos de tensões efetivas. Dois aspectos, em princípio, são diferentes (Lade, 1979):

- (a) A compressibilidade durante um carregamento hidrostático de argilas normalmente adensadas tem uma configuração diferente da correspondente a areias.
- (b) Uma única superfície de ruptura é observada nas argilas

normalmente adensadas (Lade and Musante, 1977), enquanto que uma areia possui diversas superfícies de ruptura, dependendo da densidade inicial do material.

### 3.4.1 Deformações Elásticas

As deformações elásticas são calculadas a partir da lei de Hooke, que precisa dos valores correspondentes ao módulo de elasticidade e ao coeficiente de Poisson da argila.

A variação do módulo de elasticidade com a tensão confinante efetiva é dada pela equação (3.16). Porém, estes valores são calculados a partir da inclinação inicial do carregamento primário das curvas tensão-deformação ao invés de serem obtidos, como nos materiais não-coesivos, das curvas de recarregamento (Lade, 1979). Os valores das constantes  $K_{ur}$  e  $n$  são determinados segundo indicado na figura (3.7).

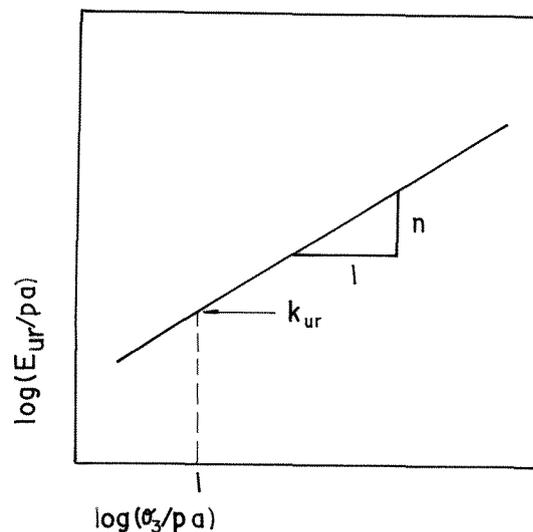


Fig. 3.7 - Determinação dos parâmetros elásticos

O coeficiente de Poisson  $\nu$  é definido a partir do Índice de Plasticidade da argila. A relação entre o coeficiente  $\nu$  e o Índice de Plasticidade foi obtido considerando os ensaios desenvolvidos por Brooker and Ireland (1965) e por Henkel and Sowa (1963). A relação obtida está indicada na figura (3.8) (Lade, 1979). De acordo com esta relação, o coeficiente de Poisson aumenta desde um valor de aproximadamente 0.2 para argilas de baixa plasticidade até valores pouco maiores que 0.3 para argilas muito plásticas.

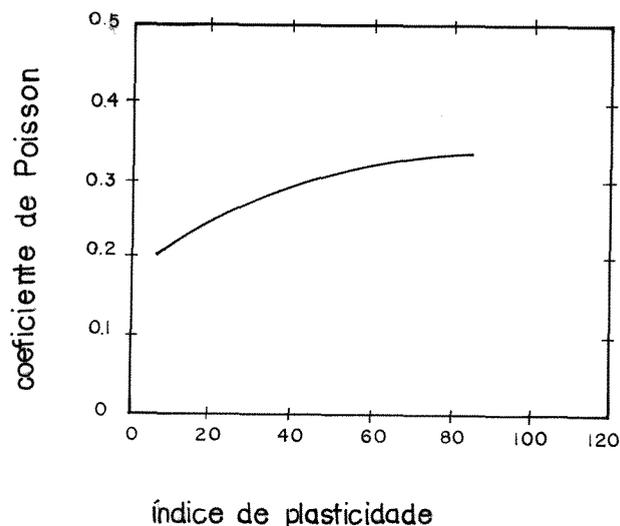


Fig. 3.8 - Coeficiente de Poisson em função do Índice de Plasticidade (Lade, 1979)

### 3.4.2 Deformações Plásticas Colapsíveis

As deformações plásticas colapsíveis numa argila normalmente adensada são calculadas com a mesma relação tensão-deformação utilizada para o caso de materiais não-coesivos. Porém, a lei de endurecimento obtida

empiricamente a partir dos resultados de ensaios de compressão isotrópica, tem uma forma diferente nas argilas. A relação que modela o trabalho plástico colapsível em função do nível de tensões  $f_c$  pode ser caracterizado por uma linha reta com a seguinte expressão:

$$\frac{W_c}{\rho a} = c + \rho \sqrt{\frac{f_c}{\rho a^2}} \quad (3.39)$$

onde  $c$  é o intercepto com o eixo vertical e  $\rho$  corresponde à inclinação da reta.

O incremento de trabalho plástico colapsível por unidade de volume resulta:

$$dW_c = \frac{\rho}{2} \rho a \left[ \frac{f_c}{\rho a^2} \right]^{-1/2} d \left[ \frac{f_c}{\rho a^2} \right] \quad (3.40)$$

Observa-se que apenas um parâmetro, a inclinação  $\rho$  da linha reta correspondente à expressão (3.39), é necessário para caracterizar as deformações plásticas colapsíveis de uma argila normalmente adensada. Não será então necessária a obtenção do parâmetro  $c$  correspondente ao intercepto desta linha reta.

A expressão (3.40) é utilizada na relação tensão-deformação definida pela relação (3.21) com o objetivo de determinar as deformações plásticas colapsíveis. A figura (3.9) representa a relação que permite a obtenção do parâmetro colapsível  $\rho$ .

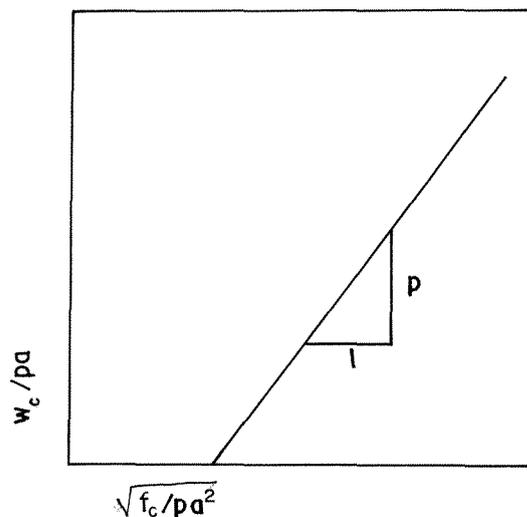


Fig. 3.9 - Determinação do parâmetro plástico colapsível

### 3.4.3 Deformações Plásticas Expansivas

As deformações plásticas expansivas de argilas normalmente adensadas são calculadas com base nas mesmas expressões indicadas para o caso de materiais não-coesivos na seção 3.2.4. Porém, como consequência das argilas normalmente adensadas apresentarem um comportamento relativamente mais simples do que as areias, alguns dos parâmetros que caracterizam as deformações plásticas expansivas nas argilas resultam nulos ou iguais à unidade.

A superfície de ruptura do material, caracterizada pelas equações (3.24) e (3.25) para o caso de areias, representa também a resistência das argilas normalmente adensadas. Os parâmetros de ruptura  $\eta_1$  e  $m$  podem ser obtidos representando

$(I_1^3/I_3 - 27)$  em relação a  $(p_a / I_1)$ , no estado de ruptura do material, num diagrama logarítmico segundo indicado na figura (3.10).

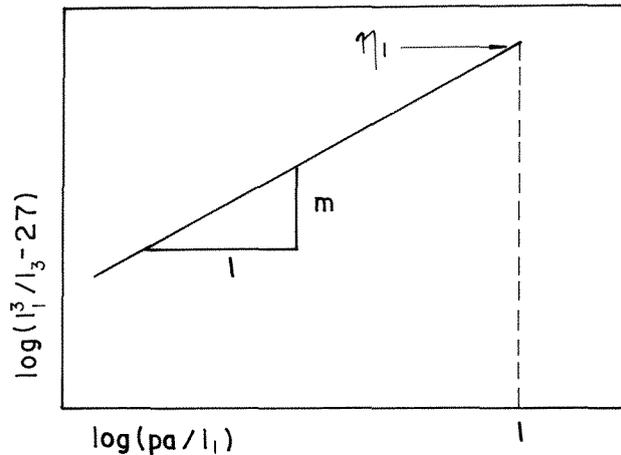


Fig. 3.10 - Determinação dos parâmetros de ruptura do material

A função potencial plástico, caracterizada pela expressão (3.27), precisa da determinação do valor  $\eta_2$ . Os valores do parâmetro  $\eta_2$  devem ser representados em função do correspondente valor do nível de tensões  $f_p$ . Lade (1979) observou que para o caso da argila então modelada (Grundite Clay) todos os pontos experimentais encontravam-se representados por uma única linha reta, segundo indicado na figura (3.11). O valor do intercepto, no caso da modelagem desta argila não resultou dependente da tensão de confinamento  $\sigma_3$ . A variação de  $\eta_2$  com  $f_p$  poderia ser expressa pela equação (3.28), porém, devido a que  $\eta_2$  se mostrava independente da tensão confinante efetiva, os valores  $S$  e  $T$  da equação (3.28) eram representados por valores constantes, obtendo os seguintes valores:

$$t_1 = 0 \quad (3.41 a)$$

$$t_2 = T = cte \quad (3.41 b)$$

$$s_1 = 0 \quad (3.41 c)$$

$$s_2 = S = cte \quad (3.41 d)$$

para o caso da Grundite Clay.

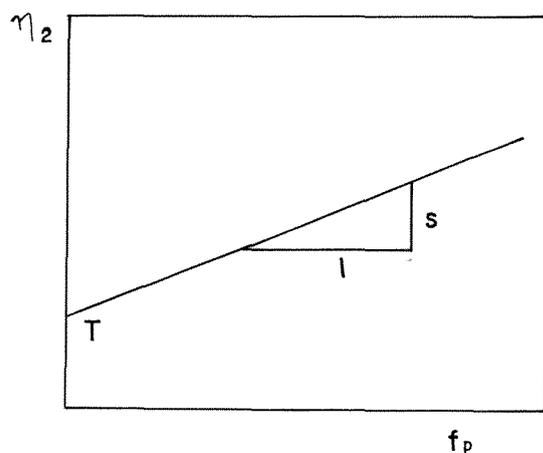


Fig. 3.11 - Variação de  $\eta_2$  com  $f_p$  para a Grundite Clay (Lade, 1979)

Para o cálculo dos parâmetros da lei de endurecimento correspondente às deformações plásticas expansivas, foi analisado cada incremento de trabalho plástico expansivo, dividindo-o pelo valor da tensão de confinamento efetiva  $\sigma'_3$  correspondente. Assim, a relação entre o trabalho plástico expansivo normalizado,  $W_p/\sigma'_3$ , e o valor  $f_p$  calculado da equação (3.24) resultou ser a mesma para os diversos ensaios de compressão triaxial executados com diferentes tensões de confinamento. A relação obtida, indicada na figura (3.12),

mostra o tipo de comportamento obtido para a argila modelada por Lade (1979).

A equação (3.33) modela a lei de endurecimento correspondente às deformações plásticas expansivas num material não-coesivo. No caso de argilas normalmente adensadas, o valor do parâmetro  $q$  resultou independente da tensão confinante  $\sigma'_3$ . Assim, a equação (3.37) que expressa o parâmetro  $q$  em função de  $\sigma'_3$  pode ser simplificada:

$$q = \alpha \quad (3.42 \text{ a})$$

$$\beta = 0.0 \quad (3.42 \text{ b})$$

para o caso da argila normalmente adensada modelada.

A variação de  $W_{ppeak}$  em função da tensão confinante é expressa pela equação (3.36). No caso da argila normalmente adensada  $W_{ppeak}$  resultou diretamente proporcional a  $\sigma'_3$  e, portanto:

$$l = 1.0 \quad (3.43 \text{ a})$$

$$P = \frac{W_{ppeak}}{\sigma'_3} \quad (3.43 \text{ b})$$

Todos os parâmetros necessários para a calibração do modelo são adimensionais. Todas as unidades ficam determinadas a partir da unidade adotada para a pressão atmosférica  $p_a$ . O processo de calibração deste modelo elasto-plástico e os resultados obtidos da modelagem da Argila Vermelha da cidade de São Paulo serão apresentados na seção 7.2. Será também efetuada

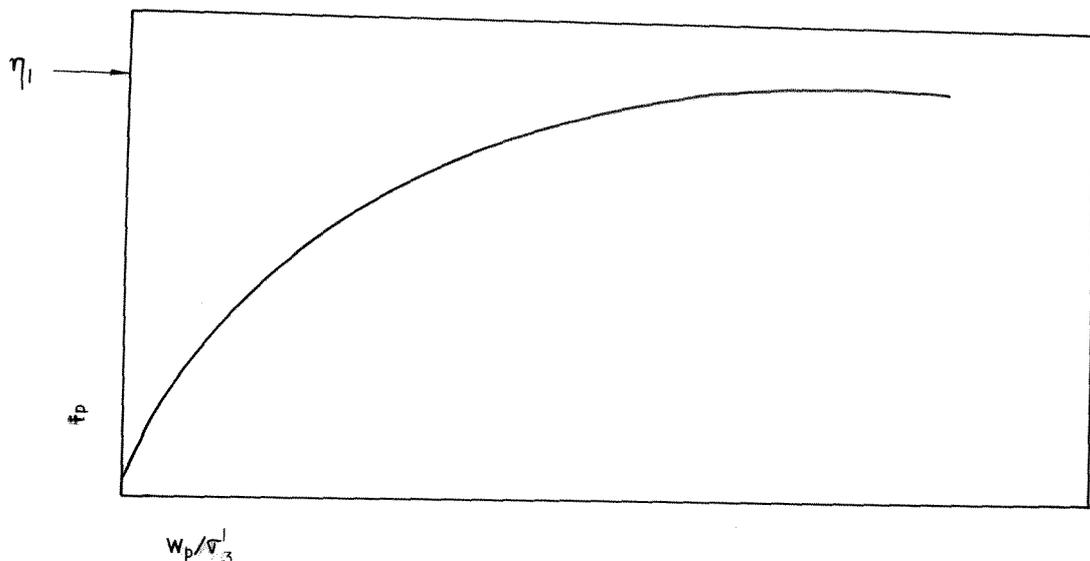


Fig. 3.12 - Relação entre o trabalho plástico expansivo e  $f_p$  para a Grundite Clay (Lade, 1979)

a reconstituição dos ensaios CTC e HC utilizados na calibração do material e, posteriormente, será feita a comparação entre os resultados experimentais obtidos e o comportamento previsto pelo modelo para o caso de ensaios de descarregamento lateral.

#### 3.4.4 Argilas Pré-Adensadas

O modelo de Lade (1979) foi formulado com o objetivo de caracterizar o comportamento de argilas normalmente adensadas. Apresenta-se, a seguir, o processo a ser utilizado na obtenção dos parâmetros do modelo caso o material em estudo se trate de uma argila pré-adensada.

Neste tipo de material, as superfícies de plastificação cônica (expansiva) e esférica (colapsível) se encontram

inicialmente expandidas. A localização destas superfícies de plastificação depende do valor da pressão de pré-adensamento do material, o qual corresponde ao maior estado de tensão sofrido pelo material ao longo da sua história de carregamento.

A figura (3.13) representa a localização inicial das superfícies de plastificação numa argila pré-adensada. O estado inicial de tensões de qualquer ponto do material se encontra localizado na região de comportamento elástico. Para determinar os valores  $f_{c0}$  e  $f_{p0}$  correspondentes às superfícies de plastificação iniciais é necessária a determinação dos valores das tensões principais  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$  correspondentes à pressão de pré-adensamento. O valor  $\sigma_1$  pode ser normalmente obtido a partir de um ensaio de adensamento do solo. O valor  $\sigma_3$  correspondente poderia ser estimado considerando o valor  $K_0$  do material quando normalmente adensado, a partir de relações empíricas.

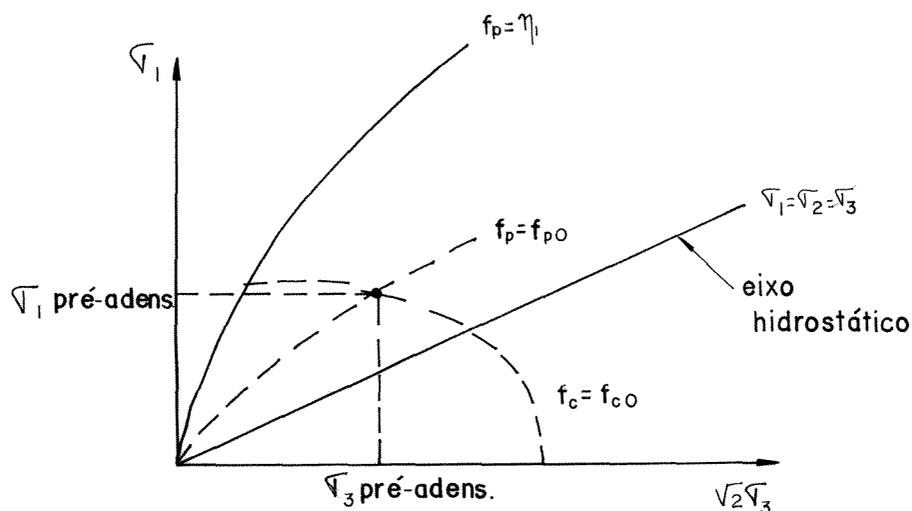


Fig. 3.13 - Localização das superfícies de plastificação numa argila pré-adensada

No processo de calibração das deformações plásticas colapsíveis, o trabalho plástico total,  $W_c$ , não poderá ser calculado a partir do ensaio de compressão hidrostática. Porém, poderá ser obtido o valor do incremento de trabalho plástico colapsível,  $\Delta W_c$ , correspondente ao trabalho plástico desenvolvido a partir do ponto em que a superfície de plastificação  $f_{co}$  é atingida. A figura (3.14) mostra o desenvolvimento do ensaio de compressão hidrostático no espaço das tensões principais para o caso de uma argila pré-adensada.

O nível de tensões  $f_{co}$  pode ser definido a partir da equação (3.17) obtida com os valores  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$  correspondentes ao pré-adensamento do material. O valor da tensão hidrostática  $\sigma_o$ , num ensaio de compressão isotrópica, para a qual será alcançada a superfície de plastificação colapsível inicial  $f_{co}$ , pode ser definida a partir da seguinte expressão (ver apêndice):

$$\sigma_o = \sqrt{\frac{f_{co}}{3}} \quad (3.44)$$

Sendo que o modelo de Lade para a representação de argilas não precisa da determinação do parâmetro  $c$ , o valor de  $\rho$ , único parâmetro colapsível necessário, poderá ser obtido plotando os valores  $\Delta W_c / \rho a$  em relação a  $\sqrt{f_c / \rho a^2}$ . O valor  $\Delta W_c$  corresponde ao incremento do trabalho plástico colapsível obtido a partir do ponto em que, no ensaio hidrostático, é superado o valor  $\sigma_o$  correspondente à superfície de plastificação  $f_{co}$ .

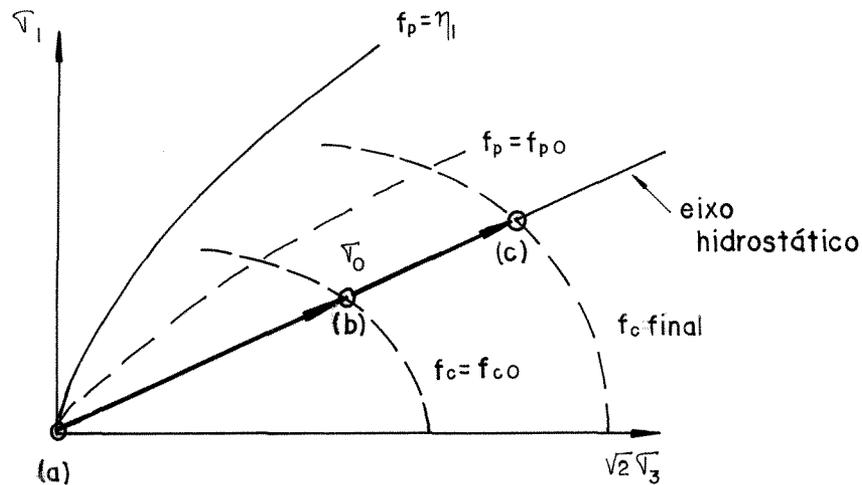


Fig. 3.14 - Ensaio de Compressão Hidrostática num material pré-adensado

Durante o processo de calibração das deformações plásticas expansivas, também não será possível definir o valor do trabalho plástico total  $W_p$  a partir dos ensaios de compressão triaxiais. Porém, poderá ser obtido o valor  $\Delta W_p$  correspondente ao incremento do trabalho plástico a partir do ponto em que o ensaio ultrapasse o nível de tensões  $f_{p0}$  correspondente à localização da superfície de plastificação inicial. O valor  $f_{p0}$  poderá ser obtido a partir da expressão (3.24) considerando os valores  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$  correspondentes ao pré-adensamento do solo.

O valor  $W_{p0}$  referente ao trabalho plástico desenvolvido pelo material até o ponto em que a superfície  $f_{p0}$  é alcançada, não poderá ser determinado. Porém, o seu valor não terá uma grande incidência nos parâmetros expansivos a serem obtidos. Este valor pode ser estimado ou desprezado já que, na verdade, durante a modelagem são necessários os valores  $dW_p$  a serem utilizados na equação (3.32), não sendo requerido o valor do

trabalho plástico  $W_p$  total.

A figura (3.15) mostra o desenvolvimento do ensaio de compressão triaxial convencional no espaço das tensões principais para o caso de um material pré-adensado. Neste caso, as deformações desenvolvidas no início do ensaio (do ponto *b* ao ponto *c*) terão apenas componentes elásticas. Posteriormente (do ponto *c* ao ponto *d*), serão desenvolvidas deformações elásticas e plásticas colapsíveis. Finalmente serão obtidas deformações elásticas, plásticas colapsíveis e plásticas expansivas.

O valor  $\sigma_{1c}$  no qual começarão as deformações plásticas colapsíveis no ensaio CTC será definido pela expressão (ver apêndice):

$$\sigma_{1c} = \sqrt{f_{c0} - 2\sigma_3^2} \quad (3.45)$$

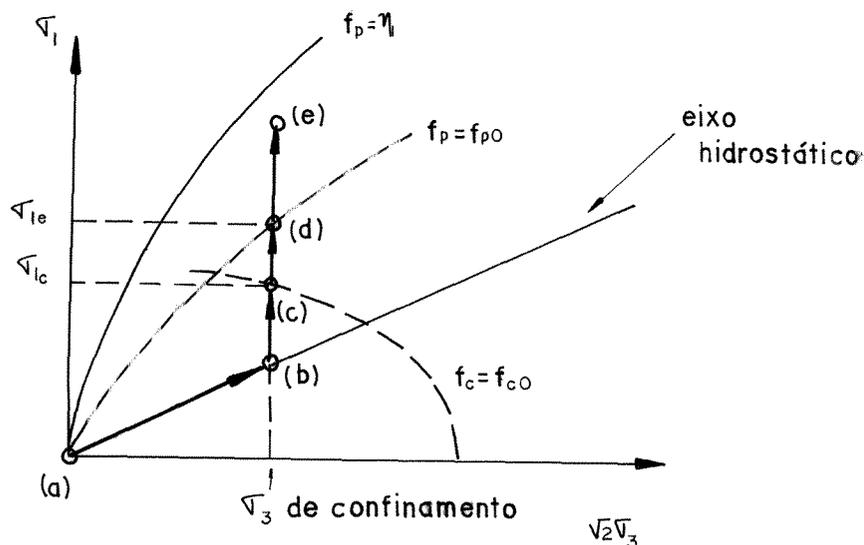


Fig. 3.15 - Ensaio de Compressão Triaxial Convencional num material pré-adensado

O valor  $\sigma_{1e}$  (ponto  $d$ ) no qual começam as deformações plásticas expansivas no ensaio CTC poderá ser definido pela seguinte expressão (ver apêndice):

$$\sigma_{1e} = \left\{ \left[ f_{po} \left( \frac{pa}{\sigma_{1e} + 2\sigma_3} \right)^m + 27 \right] \sigma_{1e} \sigma_3^2 \right\}^{1/3} - 2\sigma_3 \quad (3.46)$$

Esta última expressão constitui uma fórmula de recorrência onde o valor  $\sigma_{1e}$  será obtido num processo iterativo. O operador deste problema de ponto fixo constitui uma Contração (Albretch, 1973) que converge rapidamente para a solução do problema.

Caso o material que se pretenda modelar seja uma argila com elevada razão de sobre-adensamento, a obtenção dos parâmetros plásticos é dificultada pelo pequeno trecho do ensaio CTC no qual são consideradas deformações plásticas. Estes parâmetros poderiam ser calculados em forma aproximada devido a que, provavelmente, o solo apenas apresentará um comportamento plástico pouco antes de atingir o estado de ruptura do material.

Na seção 7.3 serão apresentados os critérios utilizados na modelagem do Solo Variegado da bacia sedimentar da cidade de São Paulo, que constitui uma argila pré-adensada.

## CAPÍTULO 4

### CONCEITOS UTILIZADOS NA ANÁLISE NÃO-LINEAR DO PROBLEMA

#### 4.1 SOLUÇÃO DE SISTEMA LINEAR DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS COM MATRIZ DE COEFICIENTES ESPARSA E NÃO-SIMÉTRICA

##### 4.1.1 Considerações Iniciais

A resolução de sistemas de equações algébricas se encontra atualmente bastante desenvolvida devido à sua relevância em diversos campos da engenharia e, em particular, na resolução de problemas de elementos finitos. O método de resolução a ser adotado numa determinada análise será um fator determinante do tempo de processamento e consumo de memória necessários na resolução do problema. Numa análise não-linear, cada uma das iterações efetuadas definirá um novo sistema a ser resolvido.

Os sistemas lineares de equações algébricas podem ser abordados através de Métodos Diretos, nos quais é conhecido o

número de operações numéricas necessárias para resolver o problema, ou utilizando Métodos Iterativos nos quais o número de iterações necessárias não pode ser definido com antecedência (Albretch, 1973; Jennings, 1977). Atualmente, a maioria dos programas de elementos finitos utilizam Métodos Diretos para a resolução dos sistemas de equações algébricas.

A escolha do método a ser implementado neste trabalho encontrou-se condicionada, basicamente por três aspectos:

- (a) A característica de esparsidade do problema. As limitações de memória requerem métodos que explorem ao máximo a estrutura da matriz de coeficientes do sistema de equações.
- (b) A Não-Simetria do problema como consequência da utilização do modelo de Lade para caracterizar o comportamento do material. Como já foi dito, este modelo elasto-plástico utiliza uma lei de fluxo não-associada e, por este motivo, origina uma matriz de rigidez não-simétrica que requer a implementação de um algoritmo de resolução de sistemas de equações algébricas que contemple esta característica. A consideração de carregamentos não-conservativos numa análise estrutural, a influência de enrijecedores nas equações de equilíbrio de cascas e placas (Estefen, 1984) e a análise por elementos finitos do fluxo de fluidos viscosos (Zienkiewicz, 1977) são exemplos de problemas que requerem a resolução de sistemas de equações não-simétricos em outras áreas da engenharia.
- (c) A necessidade de se utilizar um algoritmo de resolução do

sistema de equações que economize tempo de processamento caso uma única matriz de coeficientes seja utilizada na resolução de diversos sistemas. Origina-se este tipo de problema na resolução de sistemas não-lineares quando resolvidos iterativamente mantendo constante a matriz de rigidez do problema. Esta característica permite a redução do custo computacional da análise.

#### 4.1.2 Método de Resolução Adotado

O método de resolução aqui adotado é o Método de Banachiewicz (Albrecht, 1973; Zienkiewicz, 1977), semelhante ao método compacto de Crout. O problema geral consiste na resolução do sistema:

$$[A] \{x\} = \{b\} \quad (4.1)$$

onde  $[A]$  é uma matriz de coeficientes quadrada,  $\{x\}$  representa o vetor das incógnitas e  $\{b\}$  corresponde ao vetor do segundo membro de valores conhecidos.

Considere-se que a matriz de coeficientes possa ser expressa como o produto de uma matriz triangular inferior com diagonal unitária e uma matriz triangular superior, ou seja:

$$[A] = [L] [U] \quad (4.2)$$

onde

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ L_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

e

$$[U] = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & \dots & U_{1n} \\ 0 & U_{22} & \dots & U_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & U_{nn} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Este processo é denominado *Decomposição Triangular* de [A]. Assim, a solução do sistema pode ser obtida a partir da resolução dos sistemas:

$$[L] \{y\} = \{b\} \quad (4.5)$$

$$[U] \{x\} = \{y\} \quad (4.6)$$

onde  $\{y\}$  é um vetor intermediário no processo. A resolução destes sistemas se torna trivial. Procede-se inicialmente à redução do vetor  $\{b\}$ :

$$y_1 = b_1$$

$$y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij} y_j \quad (i = 2, 3, \dots, n) \quad (4.7)$$

e posteriormente à retro-substituição:

$$x_n = y_n / U_{nn}$$

$$x_i = \left[ y_i - \sum_{j=i+1}^n U_{ij} x_j \right] / U_{ii} \quad (i = n-1, n-2, \dots, 1) \quad (4.8)$$

O problema todo se reduz, portanto, em efetuar a decomposição triangular da matriz de coeficientes. As operações necessárias para esta decomposição são desenvolvidas diretamente na matriz de coeficientes. Pode se considerar a matriz de coeficientes dividida em três partes (figura 4.1): uma região correspondente aos coeficientes já reduzidos, uma

segunda região (região ativa) correspondente aos valores que estão sendo reduzidos e uma terceira região que corresponde aos coeficientes que não foram reduzidos.

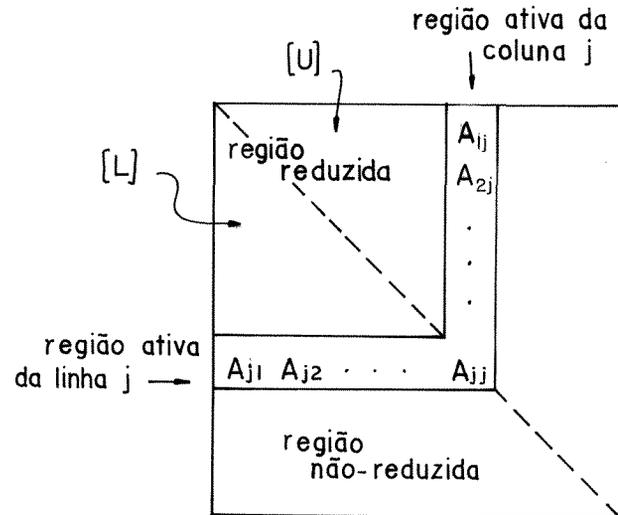


Fig. 4.1 - Regiões em que se considera dividida a matriz de coeficientes

O algoritmo da decomposição triangular de uma matriz  $n \times n$  é efetuada considerando o seguinte processo (figura 4.2):

$$\begin{aligned} U_{11} &= A_{11} \\ L_{11} &= 1.0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

e, para as regiões ativas  $j = 2, \dots, n$ :

$$\begin{aligned} L_{j1} &= A_{j1} / U_{11} \\ U_{1j} &= A_{1j} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Efetuada, posteriormente:

$$L_{ji} = \left[ A_{ji} - \sum_{m=1}^{i-1} L_{jm} U_{mi} \right] / U_{ii}$$

$$U_{ij} = A_{ij} - \sum_{m=1}^{i-1} L_{im} U_{mj} \quad (4.11)$$

$(i = 2, \dots, j-1)$

e finalmente:

$$L_{jj} = 1$$

$$U_{jj} = A_{jj} - \sum_{m=1}^{j-1} L_{jm} U_{mj} \quad (4.12)$$

Uma vez efetuada a decomposição triangular, várias soluções para diferentes vetores  $\{b\}$  do segundo membro podem ser obtidas sem necessidade de recalculer  $[L]$  e  $[U]$ , o que representa uma grande economia já que o processo de decomposição triangular constitui a etapa de maior custo computacional na resolução.

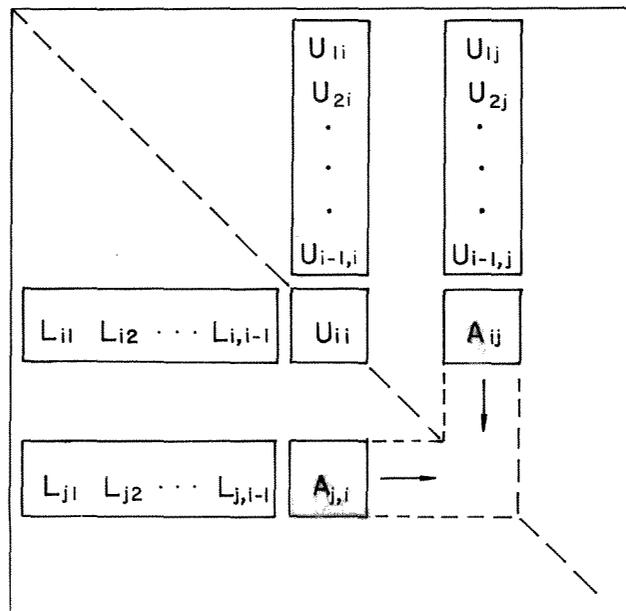


Fig. 4.2 - Processo de decomposição triangular

As subrotinas *SOLSIM* e *SOLNSI*, implementadas neste trabalho utilizam o método compacto de resolução mencionado para o caso de sistemas de equações simétricos e não-simétricos, respectivamente (Zienkiewicz, 1977). Nestas subrotinas, segundo indicado na figura (4.3), são desenvolvidas as etapas já referidas. Esta metodologia de resolução permite a utilização de eficientes técnicas de armazenamento da matriz de rigidez a serem apresentadas a seguir.

Uma outra técnica de resolução muito utilizada em elementos finitos é o método frontal de resolução (Hood, 1976; Hinton and Owen, 1977). Uma comparação entre o método compacto aqui implementado e o método frontal de resolução é efetuada por Taylor et al (1980) que defendem a utilização do método

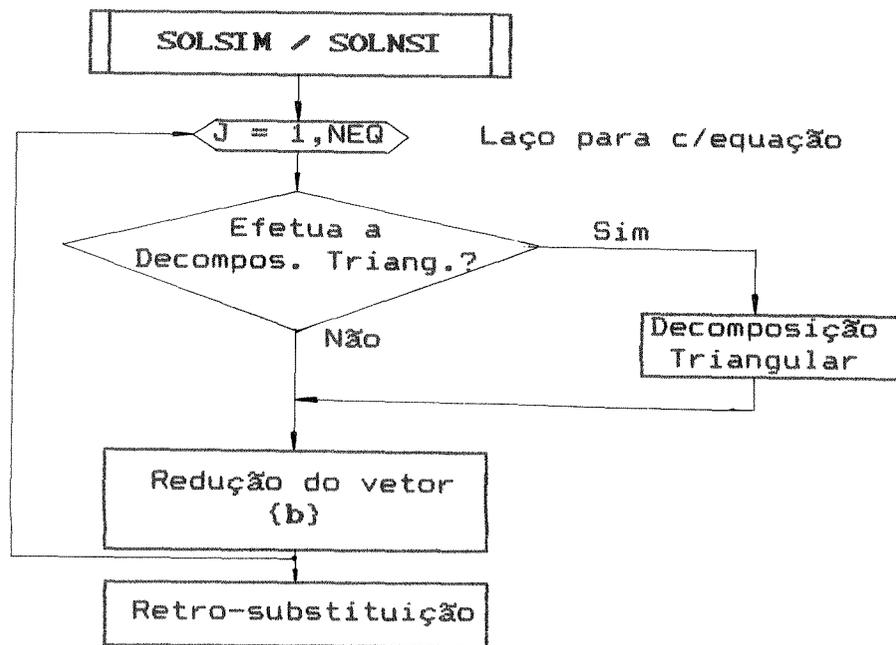


Fig. 4.3 - Esquema básico das subrotinas utilizadas para resolução de sistemas de equações algébricas simétricas e não-simétricas

aqui apresentado. Técnicas especiais devem ser implementadas para a abordagem de problemas de um número muito elevado de graus de liberdade (Wilson, Bathe and Doherty, 1974; Stabrowski, 1981).

#### 4.1.3 Técnicas de Armazenamento de Matrizes Esparsas

Uma importante redução na quantidade de valores a serem armazenados surge se a matriz de coeficientes for simétrica. Neste caso, verifica-se que:

$$U_{ij} = L_{ji} U_{ii} \quad (4.13)$$

e, portanto, não será necessário armazenar todos os coeficientes da matriz de rigidez, podendo utilizar apenas os coeficientes acima da diagonal principal, definindo os coeficientes restantes através da equação (4.13).

Uma importante redução na memória necessária pode ser observada caso seja armazenada apenas a faixa (ou banda) de termos não-nulos da matriz de coeficientes. Esta técnica é adequada para matrizes de distribuição semelhante à da figura (4.4) na que os coeficientes não-nulos se encontram concentrados ao longo da diagonal principal. A técnica da semi-banda transforma a matriz original  $n \times n$  numa outra  $n \times w$ , onde  $w$  é a maior largura de banda. Um elemento  $A(i,j)$  da matriz original  $n \times n$  fica armazenada em  $Ab(i,j-i+1)$  da matriz de banda  $n \times w$ .

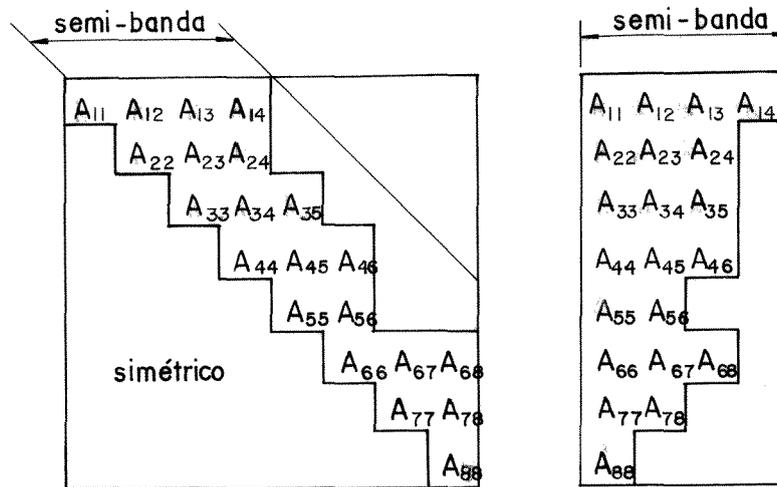


Fig. 4.4 - Armazenamento em banda da matriz  $[A]_{n \times n}$  na matriz  $[Ab]_{n \times v}$

Esta última técnica resulta ainda ineficiente no tratamento de matrizes esparsas do tipo da mostrada na figura (4.5) onde, por causa de uma faixa vertical contendo uma quantidade maior de elementos não nulos, a largura de banda se torna muito grande. Este tipo de distribuição representa tipicamente um elemento de barra caracterizando um tirante ou uma estronca que vincula pontos nodais com numeração distante na malha de elementos finitos. A técnica de armazenamento em perfil de banda variável (Skyline) adotada neste trabalho evita o armazenamento de elementos nulos de matrizes como a indicada na figura (4.5), armazenando num único vetor apenas as colunas de coeficientes desde o seu primeiro elemento não-nulo até a diagonal principal (Mondkar and Powell, 1974; Felippa, 1975; Zienkiewicz, 1977; Jennings, 1977; Gattass, Ferrari e Figueiredo, 1984).

A subrotina *SOLSIM* utiliza este tipo de armazenamento na

resolução de um sistema de equações simétrico. O armazenamento em forma de perfil de banda variável está também implementado na subrotina *SOLNSI* para o caso de um sistema de equações não-simétrico. Neste, as linhas de coeficientes não-nulos da parte triangular inferior da matriz são armazenados num segundo vetor. Nos problemas não-simétricos, a forma do perfil continua a ser simétrica.

A altura máxima de cada coluna do perfil é determinada previamente, sendo armazenadas as localizações dos elementos da diagonal principal da matriz de coeficientes no vetor *JDIAG*. A subrotina *PERFIL* define os valores deste último vetor levando em consideração as incidências dos elementos e as condições de contorno do problema. Um elemento  $A_{(i,j)}$  da matriz original ficará armazenado na posição  $As(JDIAG(j)-j+i)$  do vetor *As* que armazena o perfil de coeficientes.

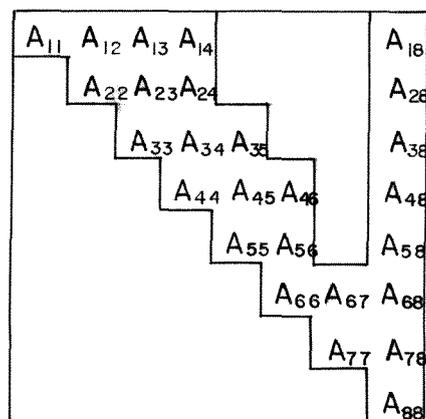


Fig. 4.5 - Elementos da matriz esparsa a serem armazenados com a técnica Skyline

#### 4.1.4 Tempo de Procesamento

Na resolução de um problema não-linear a escolha da técnica a ser utilizada (seção 4.3.1) dependerá, dentre outros fatores, da economia de tempo no processo de resolução do sistema de equações. Assim, quando se utiliza o método de Newton-Raphson Standard, serão sempre necessárias as três etapas do processo: decomposição triangular, redução do vetor  $\{b\}$  e retro-substituição. Porém, apenas as duas últimas etapas deverão ser desenvolvidas a partir da segunda iteração, caso o Método de Newton-Raphson Modificado venha a ser utilizado.

Por outro lado, na resolução de um problema não-simétrico, a escolha de alguma das técnicas de simetrização (a serem apresentadas na seção 4.2.2) dependerá, dentre outros condicionantes, da diferença entre o tempo de processamento dum problema simétrico em contraposição ao custo computacional de um problema não-simétrico.

A seguir, serão apresentados os tempos consumidos na resolução de sistemas simétricos e não-simétricos de equações utilizando as subrotinas implementadas no programa *ANLOG*. O pequeno sistema de 8 equações (sistema de equações  $\alpha$ ) com um perfil total de 26 elementos mostrado na figura (4.6) foi resolvido utilizando as duas subrotinas. Os resultados obtidos estão apresentados na tabela (4.1). Estes sistemas foram processados no computador CDC Cyber 170-835 do Rio Datacentro da PUC/RJ.

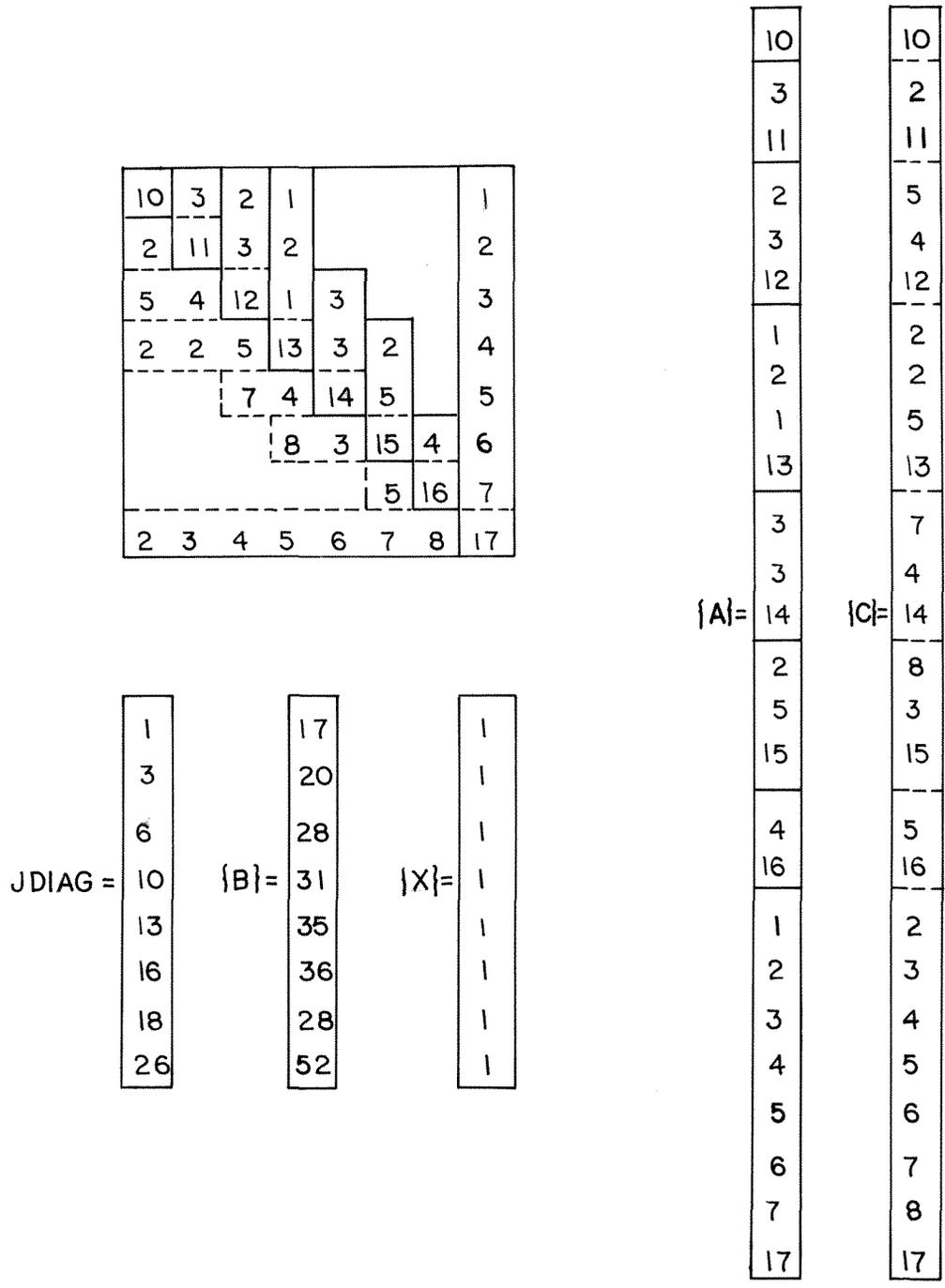


Fig. 4.6 - Sistema de equações com matriz armazenada em perfil de banda variável (sistema de equações a)

Tabela (4.1)

Tempos de Processamento - Sistema de Equações (a)

		Tempo de Execução
Sistema Simétrico	Decomposição triangular + Redução + Retrosbst.	$\approx 0.0020$ s.CPU
	Redução + Retrosbst.	$\approx 0.0010$ s.CPU
Sistema Não- Simétrico	Decomposição triangular + Redução + Retrosbst.	$\approx 0.0030$ s.CPU
	Redução + Retrosbst.	$\approx 0.0010$ s.CPU

O sistema de 824 equações (sistema de equações b) correspondente ao problema de elementos finitos da primeira etapa do processo de escavação a ser apresentado no capítulo 7, mostrou os tempos de processamento indicados na tabela (4.2). Este processamento foi desenvolvido no mesmo computador que o problema anterior. Cada um dos vetores que armazenam as partes triangulares superior e inferior da matriz de rigidez têm 47540 posições.

Observa-se que para sistemas de equações maiores, aumenta a economia relativa de tempo com a utilização de algoritmos de resolução de sistemas simétricos. Adverte-se também que o tempo gasto pelos processos de redução e retro-substituição se torna sensivelmente inferior ao tempo utilizado para efetuar a decomposição triangular.

Tabela (4.2)

Tempos de Processamento - Sistema de Equações (b)

		Tempo de Execução
Sistema Simétrico	Decomposição triangular + Redução + Retrosbst.	7.420 s.CPU
	Redução + Retrosbst.	0.423 s.CPU
Sistema Não- Simétrico	Decomposição triangular + Redução + Retrosbst.	13.370 s.CPU
	Redução + Retrosbst.	0.421 s.CPU

## 4.2 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DO MODELO ELASTO-PLÁSTICO DE LADE

### 4.2.1 Formulação da Matriz Constitutiva

Os modelos constitutivos que descrevem o comportamento tensão-deformação dos materiais não são geralmente desenvolvidos numa forma que permita sua direta utilização na implementação computacional num programa de elementos finitos.

Formulações para a implementação do modelo de Lade (1977), caracterizado pela utilização simultânea de duas superfícies de plastificação, num código de elementos finitos foram desenvolvidos por Lade and Nelson (1984) e por Azevedo and Ko (1986b). Baseado nesta última proposta, foi efetuada a implementação do modelos de Lade (1977,1979) com duas superfícies de plastificação descritos no capítulo 3, no programa aqui desenvolvido. Os casos mais simples nos quais o

modelo utiliza uma única superfície de plastificação, ou trabalha elasticamente podem também ser considerados.

Segundo foi indicado na seção 3.3.1, a deformação total é dividida em componentes elásticas, plásticas colapsíveis e plásticas expansivas, ou seja:

$$\{d\varepsilon\} = \{d\varepsilon^e\} + \{d\varepsilon^c\} + \{d\varepsilon^p\} \quad (3.15)$$

onde a componente elástica pode ser calculada por:

$$\{d\varepsilon^e\} = [D_e]^{-1} \{d\sigma\} \quad (4.14)$$

$[D_e]$  corresponde à matriz de elasticidade do material.

Por outro lado, segundo foi indicado na seção 3.2.3, a lei de fluxo que define as componentes plásticas de deformação pode ser expressa em termos do trabalho plástico desenvolvido:

$$\{d\varepsilon_p\} = \frac{dW_p}{\{\sigma\}^T \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right\}} \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right\} \quad (3.14)$$

Substituindo nesta última equação as expressões (3.20) e (3.31), e considerando posteriormente as expressões (3.15) e (4.14) tem-se:

$$\{d\varepsilon\} = [D_e]^{-1} \{d\sigma\} + \frac{dW_c}{2 f_c} \left\{ \frac{\partial f_c}{\partial \sigma} \right\} + \frac{dW_p}{3 g_p + m \eta_2 \left[ \frac{p\alpha}{I_1} \right]^m I_3} \left\{ \frac{\partial g_p}{\partial \sigma} \right\} \quad (4.15)$$

onde  $f_c$  representa o nível de tensões da superfície plástica colapsível formulada em termos das tensões principais (equação 3.17).

A equação (4.15) pode ser expressa como:

$$\{d\varepsilon\} = [D_0]^{-1} \{d\sigma\} + [T] \{dW\} \quad (4.16)$$

onde :

$$[T] = \begin{bmatrix} \left\{ \frac{\partial f_c}{\partial \sigma} \right\} & \left\{ \frac{\partial g_p}{\partial \sigma} \right\} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

e

$$\{dW\} = \begin{bmatrix} \frac{dW_c}{2 f_c} \\ dW_p \\ \frac{3 g_p + m \eta_2 \left( \frac{\rho \alpha}{I_1} \right)^m I_3}{3 g_p + m \eta_2 \left( \frac{\rho \alpha}{I_1} \right)^m I_3} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Considerando a Condição de Consistência (Prager, 1949) tem-se, para a superfície de plastificação colapsível do problema,

$$dF_c = \left\{ \frac{\partial f_c}{\partial \sigma} \right\}^T \{d\sigma\} - \frac{df_c''}{dW_c} \frac{2 f_c}{2 f_c} \frac{dW_c}{2 f_c} = 0 \quad (4.19)$$

onde  $f_c''$  representa o nível de tensões formulado considerando os parâmetros de endurecimento do material (expressão 3.22). Considerando agora a superfície plástica expansiva, tem-se:

$$dF_p = \left\{ \frac{\partial f_p}{\partial \sigma} \right\}^T \{d\sigma\} - \frac{df_p''}{dW_p} \left[ 3 g_p + m \eta_2 \left( \frac{\rho \alpha}{I_1} \right)^m I_3 \right] \frac{dW_p}{3 g_p + m \eta_2 \left( \frac{\rho \alpha}{I_1} \right)^m I_3} = 0 \quad (4.20)$$

onde  $f_p'$  e  $f_p''$  correspondem aos níveis de tensões das superfícies de plastificação formulados em termos das tensões principais

(expressão 3.24) e dos parâmetros de endurecimento (expressão 3.33), respectivamente. Estas equações podem ser consideradas como:

$$\{0\} = [R] \{d\sigma\} + [A] \{dW\} \quad (4.21)$$

onde:

$$[R] = \begin{bmatrix} \left\{ \frac{\partial f_c}{\partial \sigma} \right\}^T \\ \left\{ \frac{\partial f_p}{\partial \sigma} \right\}^T \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

e

$$[A] = \begin{bmatrix} A_c & 0 \\ 0 & A_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 f_c' \frac{df_c''}{dW_c} & 0 \\ 0 & -\frac{df_p''}{dW_p} \left[ 3 g_{p+m} \eta_2 \left( \frac{p\alpha}{I_1} \right)^m I_9 \right] \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Eliminando  $\{dW\}$  das expressões (4.16) e (4.21) obtém-se finalmente:

$$\{d\sigma\} = [Dep] \{d\varepsilon\} \quad (4.24)$$

onde:

$$[Dep] = \left[ [D_0] - [D_0][T] \left[ [R] [D_0] [T] - [A] \right]^{-1} [R][D_0] \right] \quad (4.25)$$

Esta matriz constitutiva corresponde ao caso geral em que as duas superfícies de plastificação são ativadas.

As características desta lei constitutiva para o caso da modelagem de areias e de argilas foi apresentado nas seções 3.3 e 3.4. Estas duas formulações podem ser implementadas num único

código computacional já que a formulação, no caso das argilas considera valores pré-fixados para certos parâmetros, sem afetar com isto as expressões do modelo. A única diferença na implementação destas duas versões do modelo é decorrente das diferentes leis de endurecimento utilizadas para definir a magnitude das deformações plásticas colapsíveis. Assim, na expressão (4.23) tem-se, considerando a equação (3.23) para o caso de areias,

$$\frac{df_c''}{dW_c} = \frac{\rho a}{c \rho} \left[ \frac{f_c''}{\rho a^2} \right]^{1-\rho} \quad (4.26)$$

enquanto que, para o caso de argilas tem-se, a partir da expressão (3.40):

$$\frac{df_c''}{dW_c} = \frac{2 \rho a}{\rho} \left[ \frac{\rho a^2}{f_c''} \right]^{-1/2} \quad (4.27)$$

Esta última expressão independe do parâmetro  $c$ .

A matriz constitutiva dos modelos de Lade (1977,1979) foi implementada no programa *ANLOG* através da subrotina *DLADE*. Esta subrotina será utilizada durante o processo de definição da matriz de rigidez global do problema e no processo de cálculo do estado de tensões final de cada etapa do processo iterativo.

#### 4.2.2 Simetrização do Problema

Os modelos constitutivos que consideram plasticidade não-associada definem uma matriz constitutiva não-simétrica, com o que a matriz de rigidez global do problema será ,por sua

vez, de característica não-simétrica. Esta particularidade do problema provoca algumas dificuldades:

(a) Surge a necessidade de utilização de rotinas de resolução de sistemas de equações não-simétricas. Isto provoca um maior custo computacional conforme observou-se na seção 4.1.4.

(b) A capacidade de memória necessária é quase dobrada como consequência da necessidade de armazenar a totalidade da matriz de rigidez.

Recentes publicações têm apresentado formulações simétricas para a resolução de problemas de elementos finitos onde são utilizados materiais baseados em plasticidade não-associada (Xiong, 1985; Pande and Pietruszczak, 1986; Cuitino, Gioi y Dvorkin, 1988). Estas formulações mostraram um bom desempenho nos diferentes casos apresentados.

Tirando vantagem da utilização de processos iterativos de resolução do problema não-linear, foram implementados no programa aqui desenvolvido algumas técnicas que permitem a utilização de uma matriz de rigidez global simétrica nas análises a serem efetuadas. Assim, ao invés de calcular a matriz de rigidez tangente não-simétrica do problema será definida uma matriz de rigidez simétrica que aproxime a matriz tangente através de um processo de simetrização da matriz constitutiva utilizada. Por outro lado, o estado final de tensões continuará a ser calculado utilizando a matriz constitutiva não-simétrica correspondente.

A simetrização do problema foi abordada considerando três possíveis técnicas: a utilização de um material associado equivalente, da matriz constitutiva simétrica média e da matriz elástica.

*(a) Utilização de um Material Associado Equivalente.*

A relação entre o valor  $\eta_2$ , que caracteriza a lei de endurecimento do material, e o nível de tensões  $f_p$ , correspondente às deformações plásticas expansivas, está indicado na expressão (3.28). Observa-se (Lade, 1977) que se  $\eta_2$  for igual a  $f_p$  em todos os níveis de tensões, a função potencial plástico (equação 3.27) será idêntica à função de plastificação (equação 3.24) e, portanto, o critério de normalidade caracterizará este material.

Desta forma, forçando alguns parâmetros de endurecimento do material a adotarem valores pré-definidos, teremos um material equivalente caracterizado por uma lei de fluxo associada, no qual todos os parâmetros do solo, a não ser aqueles que foram pré-definidos, serão iguais aos do material originário.

Para forçar o valor  $\eta_2$  a ser idêntico a  $f_p$  (ver equação 3.28), basta os parâmetros  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $t_1$  e  $t_2$  adotarem os seguintes valores:

$$s_1 = 1.0 \quad (4.28 \ a)$$

$$s_2 = 0.0 \quad (4.28 \text{ b})$$

$$t_1 = 0.0 \quad (4.28 \text{ c})$$

$$t_2 = 0.0 \quad (4.28 \text{ d})$$

Estas magnitudes são utilizadas na subrotina *DLADE* na hora de efetuar o cálculo da matriz de rigidez global do problema. Porém, os valores verdadeiros destes parâmetros serão utilizados durante o cálculo do estado de tensões finais ao longo do processo iterativo de resolução.

*(b) Utilização da Matriz Constitutiva Simétrica Média*

Considerando a matriz não-simétrica  $[Dep]$ , observa-se que uma matriz simétrica média pode ser definida, a partir da matriz originária, considerando a expressão:

$$[Dep^m] = \frac{1}{2} \left[ [Dep] + [Dep]^T \right] \quad (4.29)$$

Esta matriz constitutiva originará uma matriz de rigidez global simétrica do sistema que será utilizada ao invés da matriz tangente de característica não-simétrica. Da mesma forma que no caso anterior, a matriz constitutiva real será utilizada durante o cálculo do estado final de tensões.

*(c) Utilização da Matriz Elástica*

No processo iterativo, sempre é possível definir a matriz de rigidez considerando apenas a componente elástica de deformação. Este processo, pode tornar a convergência extremamente lenta em alguns problemas, mas geralmente não

apresentará problemas de convergência no processo iterativo de resolução.

### 4.3 ABORDAGEM DA PLASTICIDADE INCREMENTAL EM ELEMENTOS FINITOS

#### 4.3.1 Técnicas de Resolução de Problemas Não-Lineares

Com a utilização da matriz constitutiva do modelo de Lade apresentada na seção 4.2.1, ou com a utilização de outros modelos elasto-plásticos ou não-lineares elásticos, o problema de elementos finitos resultante será não-linear. A matriz de rigidez será dependente do nível de tensões e da história de carregamento do material, não podendo ser considerada constante.

As técnicas de resolução de problemas não-lineares em elementos finitos estão amplamente difundidas (Zienkiewicz, 1977; Owen and Hinton, 1980; Cook, 1981; Naylor and Pande, 1981; Bathe, 1982). Nesta seção serão apresentados apenas algumas destas com o objetivo de explicitar os métodos implementados no programa aqui desenvolvido.

Numa análise não-linear, os carregamentos devem ser aplicados incrementalmente. Por sua vez, um processo iterativo pode ser também utilizado em cada um destes incrementos de carga.

Considere-se a função da carga total como função dos

deslocamentos  $R = f(\delta)$  num sistema de um único grau de liberdade e seja  $\delta_A$  o deslocamento correspondente à carga  $R_A$  (figura 4.7). Para um aumento de carga até o valor  $R_B$ , pretende-se definir o correspondente deslocamento  $\delta_B$ . Considerando os dois primeiros termos da expansão de Taylor de  $R = f(\delta)$  na vizinhança de  $\delta_A$  tem-se:

$$f(\delta_A + \Delta\delta_1) = f(\delta_A) + \left[ \frac{dR}{d\delta} \right]_A \Delta\delta_1 \quad (4.30)$$

onde  $f(\delta_A) = R_A$ .

Fazendo:  $\left[ \frac{dR}{d\delta} \right]_A = K_A$  (matriz de rigidez tangente em A),

o valor  $\Delta\delta_1$  pode ser obtido a partir de:

$$K_A (\Delta\delta_1) = R_B - R_A \quad (4.31)$$

Assim, o valor do deslocamento pode ser atualizado considerando:

$$\delta_1 = \delta_A + \Delta\delta_1 \quad (4.32)$$

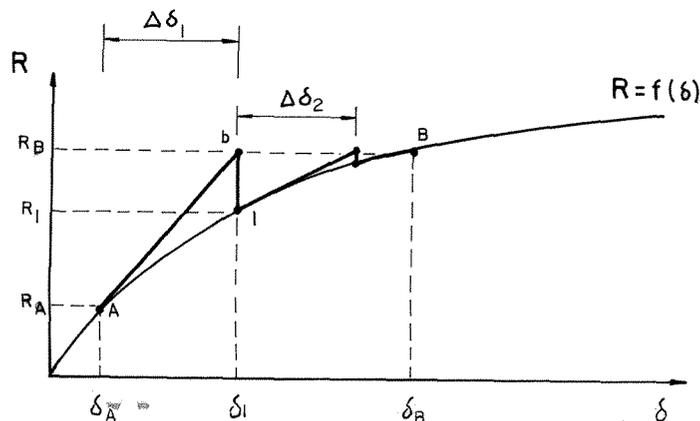


Fig. 4.7 - Resolução da equação  $R = f(\delta)$  utilizando o método de Newton-Raphson Standard

Posteriormente, deverá ser determinado o valor da força resistente  $R_1$  e da rigidez  $K_1$  para proceder então ao cálculo do próximo incremento  $\Delta\delta_2$  a partir de:

$$K_1 (\Delta\delta_2) = R_B - R_1 \quad (4.33)$$

neste caso  $R_B - R_1$  corresponde à força desequilibrada. Procedendo desta forma, tem-se finalmente:

$$\delta_A + \Delta\delta_1 + \Delta\delta_2 + \dots = \delta_B \quad (4.34)$$

Este algoritmo é conhecido como Método de Newton-Raphson.

Desta forma, no caso de um problema de múltiplos graus de liberdade, a expressão (2.32) pode ser redefinida como (Zienkiewicz, 1977):

$$\{\psi(\{\delta\})\} = [K(\{\delta\})] \{\delta\} - \{R\} = \{0\} \quad (4.35)$$

Utilizando os primeiros dois termos de uma expansão de Taylor:

$$\{\Delta\delta_n\} = [K(\{\delta_n\})]^{-1} \{\psi_n\} \quad (4.36)$$

obtendo finalmente:

$$\{\delta_{n+1}\} = \{\delta_n\} + \{\Delta\delta_n\} \quad (4.37)$$

A figura (4.7) mostra este processo, onde a matriz de rigidez é modificada em cada iteração.

Um esquema puramente incremental, onde é omitido o cálculo das forças desequilibradas pode também ser considerado. Este processo corresponde ao método de Euler para resolução numérica de equações diferenciais. O afastamento da curva correta (figura 4.8) pode ser considerável e, para evitá-lo, devem ser

utilizados incrementos de carga suficientemente pequenos.

A utilização do Método de Newton-Raphson requer que seja definida a matriz de rigidez tangente  $[K]$  e que seja efetuada a decomposição triangular para resolução do sistema de equações em cada ciclo iterativo do processo, o que pode dar origem a um elevado custo computacional. O Método de Newton-Raphson Modificado pode, então, ser utilizado (figura 4.9). Neste caso, uma única matriz de rigidez tangente é utilizada para vários ciclos iterativos do processo. Esta matriz de rigidez é atualizada ocasionalmente, provavelmente no início de cada etapa de carregamento ou quando a taxa de convergência se torna muito baixa. Em comparação com o Método de Newton-Raphson Standard, o Método Modificado requer um número maior de ciclos iterativos, porém, cada um deles é efetuado mais rapidamente já que  $[K]$  é formada e reduzida apenas no primeiro ciclo do processo. Neste método, teremos:

$$\{\Delta\delta_n\} = [K(\{\delta_o\})]^{-1} \{\psi_n\} \quad (4.38)$$

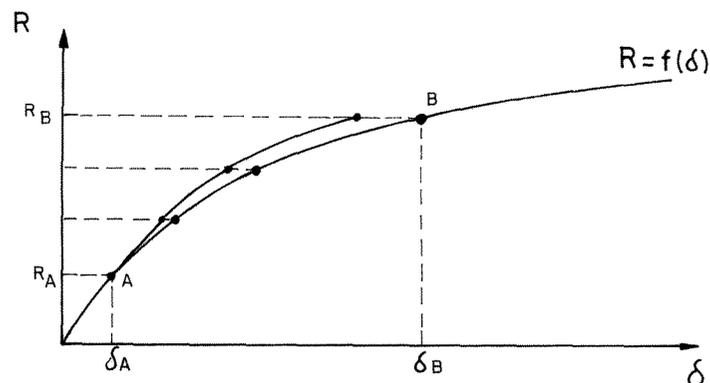


Fig. 4.8 - Resolução da equação  $R = f(\delta)$  utilizando o método de Euler

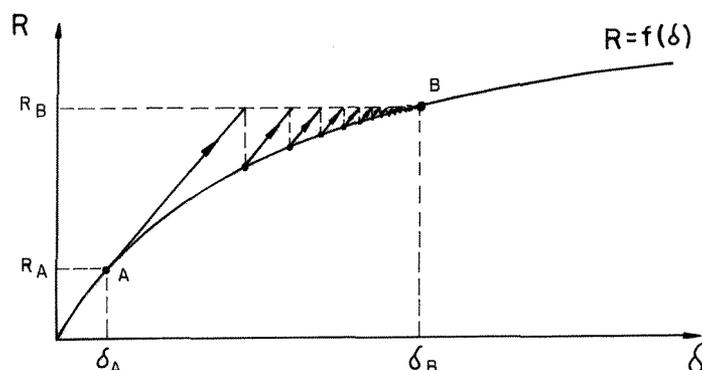


Fig. 4.9 - Resolução da equação  $R = f(\delta)$  utilizando o método de Newton-Raphson Modificado

Outros métodos poderiam ser utilizados para resolver este problema não-linear. Dentre estes, o método das iterações sucessivas ou método secante, caracterizado pela expressão:

$$\{\delta_n\} = \left[ K(\{\delta_{n-1}\}) \right]^{-1} \{R\} \quad (4.39)$$

tem uma convergência lenta sendo portanto pouco aplicado, apesar da sua simplicidade, para resolução de problemas não-lineares por elementos finitos.

Recentemente, os métodos Quasi-Newton têm sido desenvolvidos para resolução de sistemas de equações não-lineares (Matties and Strang, 1979; Bathe, 1981). Nestes, a matriz de coeficientes (ou a sua inversa) é atualizada, fornecendo aproximações secantes da matriz tangente. Estes métodos não precisam da definição da matriz de rigidez em cada uma das iterações efetuadas, como no caso do Método de Newton-Raphson Standard, sem recorrer por outro lado à utilização da matriz correspondente a uma configuração anterior, como é o caso do Método Newton-Raphson Modificado.

Dentre os métodos Quasi-Newton, o BFGS (Broyder-Fletcher-Godfarb-Shanno) se caracteriza por sua eficiência.

#### 4.3.2 Cálculo das Tensões em Problemas Elasto-Plásticos

Uma análise não-linear por elementos finitos envolve um processo incremental-iterativo por meio do qual os deslocamentos, tensões e deformações são atualizados gradualmente. Cada iteração compreende basicamente três etapas de cálculo (Mondkar and Powell, 1978):

- (a) *Linearização*: Nesta etapa, assume-se um comportamento linear para o cálculo da matriz de rigidez dos elementos, considerando o estado de tensão atual e o modelo constitutivo do material utilizado.
- (b) *Resolução do Sistema de Equações*: Nesta etapa se obtém o incremento de deslocamentos correspondente ao incremento de cargas aplicado.
- (c) *Caracterização do Estado Final*: Utiliza-se a relação tensão-deformação para definir o novo campo de tensões sendo estimadas as forças residuais que constituem, de certa forma, a medida do afastamento dos resultados obtidos em relação à solução verdadeira.

Nesta seção será examinada esta última etapa de cálculo que representa uma fase importante para a confiabilidade e economia do processo total. As tensões calculadas têm uma incidência direta não apenas na definição das forças residuais

a serem utilizadas na iteração subsequente mas também na próxima matriz de rigidez global a ser definida.

Um algoritmo incremental define o desenvolvimento das deformações plásticas levando em consideração a dependência dos valores calculados com a trajetória de tensões. Cada etapa do processo considera as propriedades do material correspondentes ao estado de tensões atualizado.

Considere-se que sob cargas  $\{R\}_A$ , os deslocamentos  $\{\delta\}_A$  e o estado de tensão são conhecidos (figura 4.7). A partir deste estado de tensão, a matriz de rigidez tangente do problema é obtida através da contribuição da rigidez de cada elemento calculada segundo a expressão (2.29).

Uma vez obtidos os deslocamentos  $\{\Delta\delta\}_1$  provocados pelo aumento das forças externas até o valor  $\{R\}_B$ , deve ser calculado o incremento de deformações  $\{\Delta\varepsilon\}$  correspondentes às deformações elasto-plásticas:

$$\{\Delta\varepsilon\} = [B] \{\Delta\delta\}_1 \quad (4.40)$$

Para definir finalmente o novo estado de tensão no elemento, a expressão (4.24) deverá ser utilizada num processo de integração (Bathe, 1981). De fato, o estado de tensão correspondente será obtido a partir de:

$$\{\Delta\sigma\} = \int [D_{ep}] \{d\varepsilon\} \quad (4.41)$$

Esta integração das tensões deve ser efetuada em cada

iteração do processo de análise não-linear. A integração pode, em princípio, ser desenvolvida utilizando qualquer técnica numérica. Em particular, uma técnica de integração explícita (Euler) pode ser utilizada. Neste caso, a solução é obtida considerando um número suficiente de sub-incrementos que permitirá trabalhar com a precisão desejada. Esta integração explícita é utilizada no presente trabalho. Caso um método de integração implícita venha a ser utilizado, se tornará necessária a implementação de um processo iterativo para efetuar a integração.

Diversos critérios têm sido sugeridos para definir o tamanho dos sub-incrementos a serem utilizados. Nayak and Zienkiewicz (1972), Owen and Hinton (1980) e Marques (1984) definem o acréscimo máximo permitido na função de plastificação. Nyssen (1981) utiliza o erro de truncamento estimado de uma etapa de integração. Considerando por um lado que no modelo de Lade são utilizadas duas superfícies de plastificação simultâneas e, por outro lado, com o intuito de definir um critério que permita visualizar fisicamente a dimensão dos sub-incrementos, optou-se por limitar o tamanho máximo permitido do incremento de deformação.

Define-se a norma  $\|\varepsilon\|$  do incremento de deformação em cada ponto de Gauss de integração como:

$$\|\varepsilon\| = \sqrt{\Delta\varepsilon_1^2 + \Delta\varepsilon_3^2} \quad (4.42 \ a)$$

$$\|\varepsilon\| = \sqrt{\Delta\varepsilon_x^2 + \Delta\varepsilon_y^2 + \frac{1}{2} \Delta\varepsilon_{xy}^2} \quad (4.42 \text{ b})$$

onde  $\Delta\varepsilon_1$  e  $\Delta\varepsilon_3$  correspondem aos incrementos de deformação principais maior e menor e  $\Delta\varepsilon_x$ ,  $\Delta\varepsilon_y$  e  $\Delta\varepsilon_{xy}$  são os incrementos de deformação nas direções  $x$  e  $y$  do tensor de deformações.

O valor  $\|\varepsilon\|$  assim obtido será comparado com a deformação de referência  $\|\varepsilon\|_{ref}$  que corresponde ao tamanho máximo permitido em cada sub-incremento. Considera-se aceitável trabalhar com uma deformação de referência  $\|\varepsilon\|_{ref}$  da ordem da milésima parte da deformação axial alcançada no estado de ruptura do material num ensaio CTC desenvolvido com uma tensão de confinamento representativa do problema a ser analisado. Assim, o número de sub-incrementos (*NSUBS*) em cada ponto de integração de Gauss é determinado considerando a magnitude da norma  $\|\varepsilon\|$  do incremento de deformação correspondente e o valor atribuído à deformação de referência  $\|\varepsilon\|_{ref}$  através da expressão:

$$NSUBS = \left\lceil \frac{\|\varepsilon\|}{\|\varepsilon\|_{ref}} \right\rceil + 1 \quad (4.43)$$

A matriz  $[D_{ep}]$  a ser considerada em cada sub-incremento durante o processo de integração das tensões no caso do modelo de Lade, deverá levar em consideração os diversos tipos de carregamentos possíveis do material, dependendo do tipo de deformações desenvolvidas.

Na resolução do problema não-linear através de um processo iterativo, as superfícies de plastificação deverão ser atualizadas só depois da convergência do processo, ou seja, uma vez satisfeita a condição de equilíbrio no problema (Cook, 1981).

#### 4.3.3 Implementação do Processo de Resolução

A seguir, será apresentada a metodologia utilizada no programa *ANLOG* para a resolução do problema elasto-plástico não-linear. O processo incremental-iterativo de resolução é efetuado pela subrotina *SOLVE* cuja organização básica é apresentada na figura (4.10). Nesta, pode ser visualizado o gerenciamento das diferentes subrotinas que desenvolvem o procedimento de cálculo. A estrutura adotada neste processo considera a disposição sugerida por Owen and Hinton (1980).

Os níveis de tensões atuais correspondentes às superfícies de plastificação utilizadas para modelar qualquer material de até duas superfícies de plastificação são armazenados nas matrizes *SUP1(igaus,ielem)* e *SUP2(igaus,ielem)*, onde a primeira matriz armazena, para o caso do modelo de Lade, os valores do nível  $f_p$  atual correspondente a cada ponto de Gauss de integração. A segunda matriz, por sua vez, armazena os valores do nível  $f_c$  atual de tensões. Por outro lado, as matrizes *S1MAX(igaus,ielem)* e *S2MAX(igaus,ielem)* são encarregadas de armazenar os níveis de tensões máximos que cada ponto de integração alcançou ao longo da sua história de carregamento

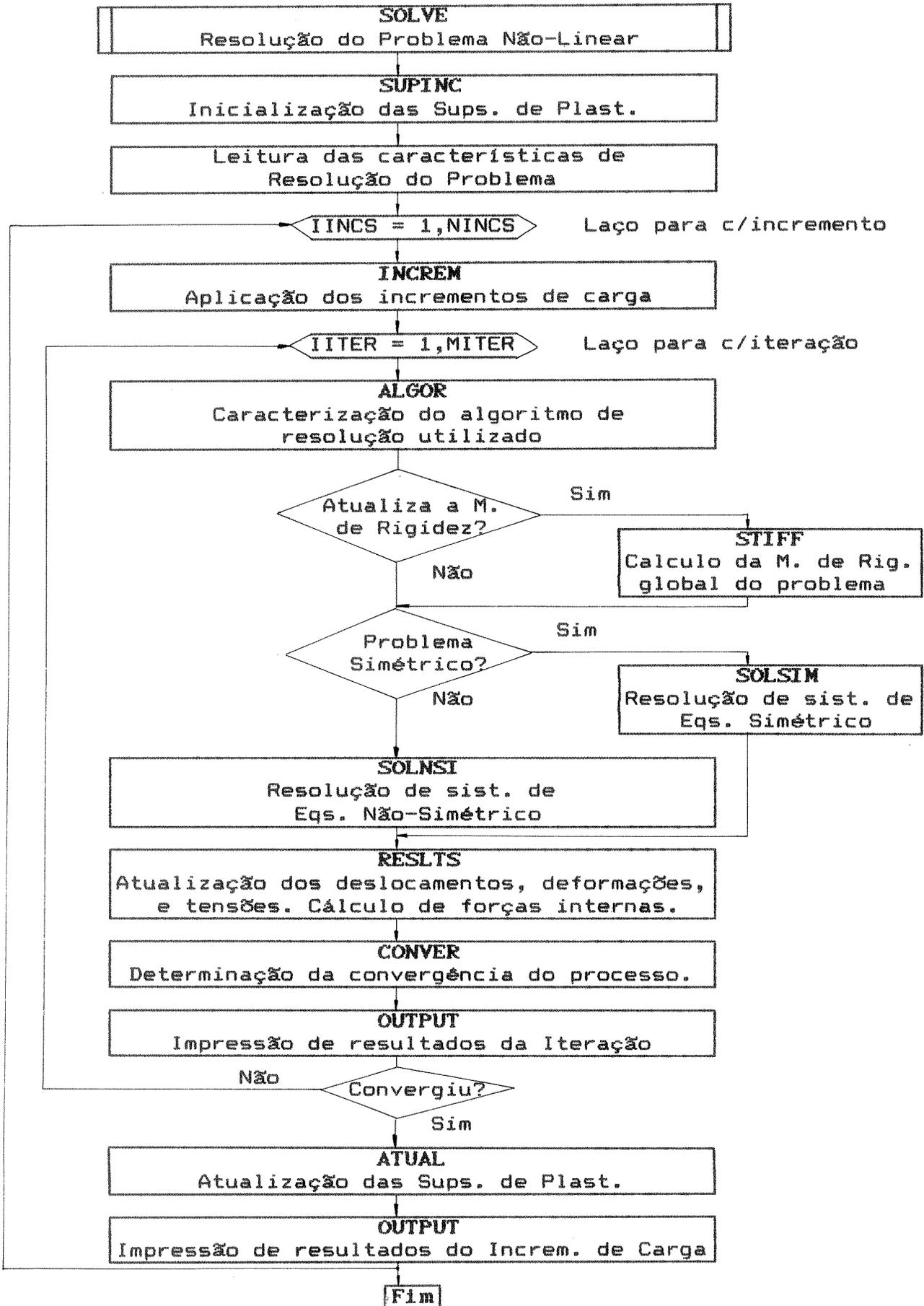


Fig. 4.10 - Processo desenvolvido pela subrotina SOLVE

determinando, portanto, a localização das superfícies de plastificação.

Na subrotina *SUPINC* serão calculados os níveis de tensões  $f_p$  e  $f_c$  correspondentes ao estado inicial de tensões do problema sendo, se for necessário, atualizadas as localizações das superfícies de plastificação.

As características do problema incremental-iterativo a ser resolvido são definidas pelo usuário através do fornecimento de parâmetros de controle que definirão o algoritmo de resolução a ser utilizado, o número de incrementos de carga considerados, as características destes incrementos, tolerância, etc.

O algoritmo de resolução é definido pelo parâmetro *LLALGR*, cujo valor estabelecerá um dos seguintes métodos de resolução não-linear atualmente implementados:

*LLALGR=1: Método da Rigidez Inicial.* A matriz de rigidez global do problema é calculada no início da análise e permanece constante ao longo de todo o processo.

*LLALGR=2: Método Newton-Raphson Standard.* A matriz de rigidez é atualizada a cada iteração de cada incremento de carga considerado.

*LLALGR=3: Método Newton-Raphson Modificado (a).* A matriz de rigidez é recalculada na primeira iteração de cada incremento de carga, permanecendo constante nas demais iterações.

*LLALGR=4: Método Newton-Raphson Modificado (b).* A matriz de

rigidez é recalculada na segunda iteração de cada incremento de carga, permanecendo constante nas demais iterações.

*LLALGR=5: Método de Euler.* O processo adotado é puramente incremental.

A aplicação dos incrementos de carga em cada etapa é efetuada pela subrotina *INCREM*. A magnitude dos incrementos de carga considerados podem ser definidos assumindo parcelas iguais do carregamento total aplicado ou considerando fatores específicos de carga para cada incremento. Neste último caso, o valor percentual da carga total a ser considerada em cada incremento é definido pela variável *FACTO* fornecida pelo usuário para cada incremento de carga.

A subrotina *ALGOR* é quem gerencia, em definitivo, o processo de resolução definido através do parâmetro *LLALGR*. Esta subrotina estabelecerá, de acordo com o tipo de algoritmo de resolução não-linear utilizado, o valor da variável de controle *LLRESL*. Esta última variável indicará, para cada etapa do processo, se a matriz de rigidez global do problema deverá ou não ser reformulada pela subrotina *STIFF* e se o processo de decomposição triangular deve ser efetuado durante a resolução do sistema de equações.

A resolução do sistema de equações será efetuada pela subrotina *SOLNSI* se o problema utiliza o modelo elasto-plástico de Lade com sua formulação não-simétrica ou pela subrotina

*SOLSIM* se alguma das técnicas de simetrização apresentadas na seção 4.2.2 for considerada. Esta última rotina será também considerada caso o modelo de Lade não seja utilizado na análise.

Uma vez calculados os valores dos incrementos de deslocamentos do problema, a subrotina *RESLTS* determinará os valores dos deslocamentos totais em cada ponto nodal e as magnitudes das deformações e tensões correspondentes à nova configuração. Serão também calculadas as forças internas resistentes obtidas a partir do estado final de tensões calculado.

Considerando o valor obtido das forças internas e a magnitude das forças externas na atual etapa do processo, a diferença entre ambas (forças desequilibradas) será calculada na subrotina *CONVER*. O critério de convergência adotado define-se como:

$$\frac{\sqrt{\left[ \sum_{i=1}^N (\psi_i)^2 \right]}}{\sqrt{\left[ \sum_{i=1}^N (\Delta f_i)^2 \right]}} \times 100.0 \leq TOLER \quad (4.44)$$

onde  $N$  corresponde ao número total de graus de liberdade,  $\psi_i$  é o valor da força desequilibrada e  $\Delta f_i$  representa o valor do incremento de carga. Se o processo converge, efetua-se um novo incremento de carga. Caso contrário, as últimas forças desequilibradas calculadas serão utilizadas num novo ciclo iterativo deste processo.

A atualização das superfícies de plastificação  $S1MAX(i_{gaus}, i_{elem})$  e  $S2MAX(i_{gaus}, i_{elem})$  é efetuada na subrotina *ATUAL* após a convergência do processo iterativo, segundo foi indicado na seção 4.3.2.

Dependendo do valor de parâmetros de controle fornecidos como dados de entrada, podem ser impressos, através da subrotina *OUTPUT*, os valores dos deslocamentos, tensões, deformações, níveis de tensões correspondentes às superfícies de plastificação, forças desequilibradas e forças residuais após cada iteração do processo ou apenas para cada incremento de carga.

Deve se ter uma especial consideração na definição do tipo de carregamento desenvolvido em cada ponto de Gauss do problema. O tipo de carregamento será armazenado na matriz  $ILOADC(i_{gaus}, i_{elem})$ . Para definir o tipo de carregamento devem ser comparados os níveis atuais de tensão  $SUP1(i_{gaus}, i_{elem})$  e  $SUP2(i_{gaus}, i_{elem})$  com os níveis que correspondem ao início do carregamento plástico:  $S1MAX(i_{gaus}, i_{elem})$  e  $S2MAX(i_{gaus}, i_{elem})$ .

A matriz constitutiva  $[D_{ep}]$ , a ser utilizada em cada ponto de integração, será definida considerando o tipo de carregamento armazenado na matriz  $ILOADC(i_{gaus}, i_{elem})$ . Este valor é definido após cada sub-incremento durante o cálculo do estado de tensão em cada ponto. A figura (4.11) apresenta as diferentes etapas do processo nas quais são atualizadas, ao

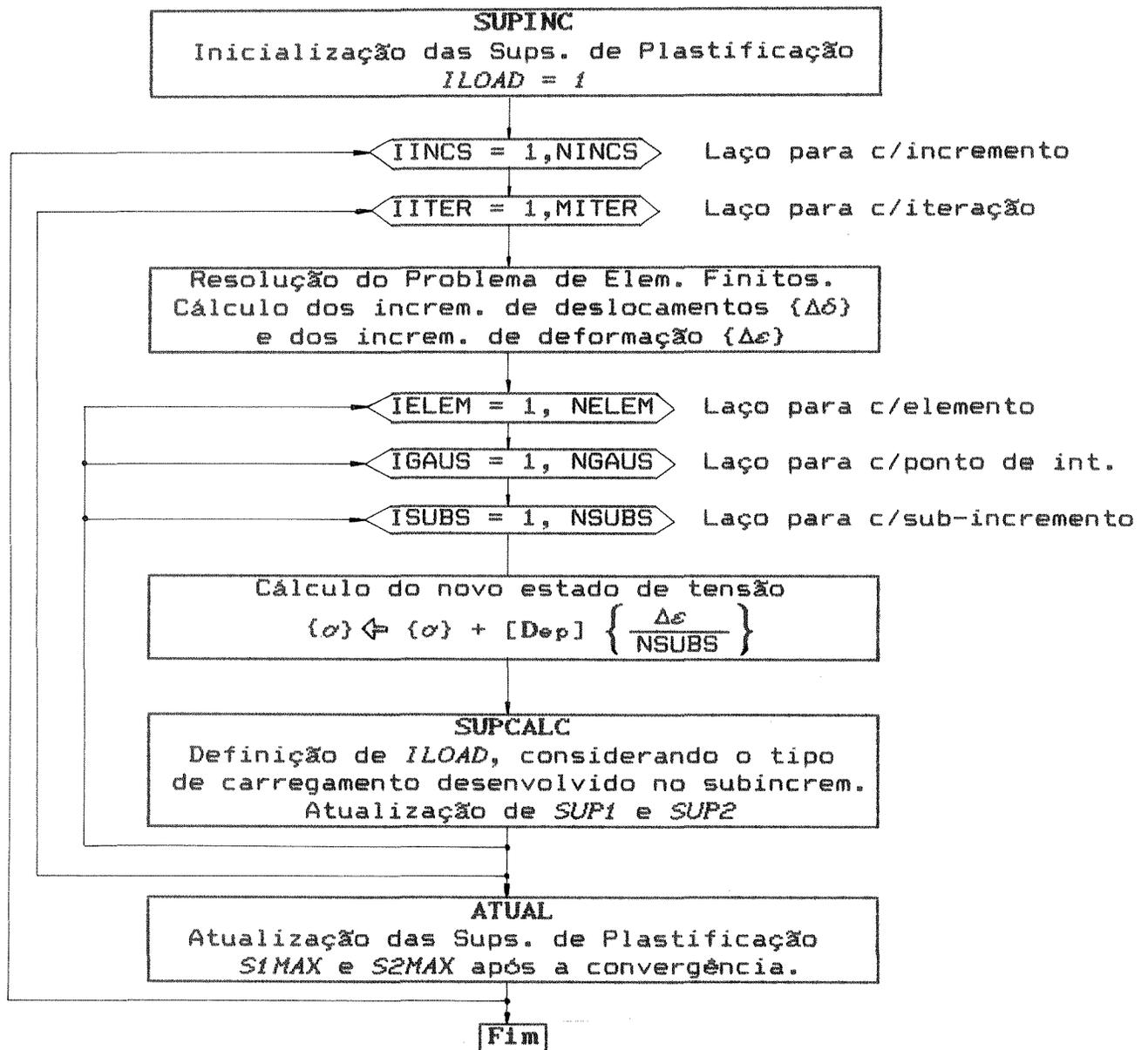


Fig. 4.11 - Atualização do tipo de carregamento e dos níveis de tensões correspondentes às superfícies de plastificação

longo do processo, as matrizes  $SUP1(igauss,ielem)$ ,  $SUP2(igauss,ielem)$ ,  $SIMAX(igauss,ielem)$ ,  $S2MAX(igauss,ielem)$  e  $ILOAD(igauss,ielem)$ . Os valores da variável  $ILOAD(igauss,ielem)$ , dependendo dos tipos de deformações considerados, são:

$ILOAD(,) = 1$  Deformações decorrentes de carregamentos ou descarregamentos elásticos.



## CAPÍTULO 5

### O PROGRAMA ANLOG

#### 5.1 INTRODUÇÃO

Duas questões foram consideradas prioritárias na abordagem por elementos finitos de uma obra geotécnica e, particularmente, de uma obra de escavação:

- (a) Uma caracterização correta da lei tensão-deformação do solo e,
- (b) Uma simulação apropriada da sequência de etapas inerentes ao processo construtivo particular de cada obra.

O programa *ANLOG* (Análise Não-Linear de Obras Geotécnicas) foi desenvolvido neste trabalho levando em consideração as duas premissas apontadas.

Visando atender a primeira destas, o modelo elasto-plástico de Lade (1977, 1979), apresentado no Capítulo

3, foi implementado tendo em vista o bom desempenho observado por este na representação do comportamento de solos quando submetido a diferentes trajetórias de tensões. As várias técnicas implementadas para a resolução do problema não-linear resultante foram apresentadas no Capítulo 4. Sem pretender ter esgotado as possibilidades de caracterização do comportamento do material apenas com a utilização de um único modelo, considera-se importante a futura implementação de outras formulações constitutivas.

Em segundo lugar, procurou-se definir um código suficientemente versátil para permitir a representação de diferentes sequências de construção e características de uma obra. Para isso, uma linguagem de macro-comandos (Taylor, 1977) foi utilizada com o objetivo de que o programa computacional implementado pudesse abordar problemas de características diversas. A linguagem de macro-comandos consiste na utilização de um conjunto de sub-programas compactos que desenvolvem uma ou algumas poucas funções no processo de resolução de um problema de elementos finitos. Assim, a abordagem das diversas etapas ou processos básicos que permitem simular características próprias do processo construtivo de uma obra geotécnica, foi desenvolvida no programa *ANLOG* através da utilização dos diferentes macro-comandos implementados cujas características serão apresentadas na seção 5.2.

Para armazenamento das matrizes e vetores utilizados pelo programa, adotou-se um esquema de alocação dinâmica (Jennings,

1977; Taylor, 1977). Desta forma, é feita a partição de um único vetor (vetor de trabalho) para armazenar tanto as matrizes de dados quanto as matrizes globais do problema. A organização do código desenvolvido será indicada na seção 5.3.

O programa possibilita a resolução de problemas bi-dimensionais, sejam estes caracterizados por um estado de deformação plana, ou bem se tratando de problemas axissimétricos. O código foi desenvolvido na linguagem FORTRAN 77. A sua versão atual se encontra implementada para utilização em um Computador Central CDC Cyber 170-835 e em microcomputadores compatíveis do tipo IBM-PC / XT/AT. Foram feitas análises preliminares, que permitiram comparar a solução analítica exata de alguns problemas com os resultados numéricos obtidos a partir da utilização do programa *ANLOG*. Os resultados destas análises serão apresentadas na seção 5.4.

## **5.2 MACRO-COMANDOS IMPLEMENTADOS NO PROGRAMA**

### **5.2.1 Considerações Iniciais**

Como já foi mencionado, o programa aqui desenvolvido consiste no gerenciamento por parte do usuário de diversos sub-programas, fato que facilita a sua aplicação em problemas práticos de engenharia geotécnica. Nos programas baseados na utilização de algoritmos fixos para resolução de um problema, o usuário se vê obrigado a modificar continuamente o código para adaptá-lo ao seu problema particular. Um programa organizado em

forma de módulos permite, por outro lado, uma abordagem mais fácil por parte de novos usuários que venham a aumentar o número de facilidades existentes no programa.

No caso de problemas constituídos por uma sequência de análises de elementos finitos que simulam as diferentes etapas construtivas de uma obra, a estrutura aqui implementada permite manter armazenadas as variáveis que definem o estado final de um problema e que representarão o estado inicial de um segunda análise, de características provavelmente diferentes das do problema inicial. O arquivo de dados do programa consistirá de uma sequência de macro-comandos que indicarão cada uma das funções a serem desenvolvidas na análise. Cada um destes comandos será acompanhado dos dados de entrada e parâmetros de controle requeridos para a sua execução. Na sua versão atual, o programa possui 19 macro-comandos implementados, cujas características principais serão apresentadas a seguir.

### **5.2.2 Macro-Comandos Básicos de um Problema de Elementos Finitos**

Definem-se aqui os comandos gerais, comuns a todos os problemas de elementos finitos que venham a ser executados, com os quais se efetua a leitura dos dados e se processa a resolução do problema propriamente dito.

**DADOS.** Como o seu próprio nome sugere, a utilização deste comando permite a leitura das características do problema.

Dados gerais, tais como o tipo de problema bi-dimensional (de deformação plana ou axissimétrico), o número de pontos nodais e o número de elementos, são inicialmente incorporados. Procede-se, a seguir, à leitura das características da malha de elementos finitos (coordenadas dos pontos nodais, incidência dos elementos, etc.), valores que podem ser lidos individualmente ou por meio de uma rotina de geração automática da malha caso os elementos se encontrem distribuídos regularmente. Posteriormente, são lidos os dados correspondentes aos parâmetros dos materiais a serem utilizados na análise. Finalmente, são incorporadas as condições de contorno do problema, seja de forma individual para cada ponto nodal, ou automaticamente, caso os pontos estejam distribuídos regularmente. A leitura inicial dos dados de todo problema a ser analisado deve ser sempre efetuada através deste macro-comando *DADOS*. Como se verá posteriormente, a leitura de estágios intermediários de um problema poderá ser efetuada com o macro-comando *LARIN*.

*CRREG*. Este macro-comando efetua a leitura das forças externas a serem aplicadas no problema em estudo. Podem ser caracterizadas forças aplicadas diretamente nos pontos nodais da malha, forças de massa ou forças distribuídas na superfície dos elementos. Na seção 2.2.8 foi apresentada a transformação necessária destes dois últimos tipos de carregamentos em forças nodais equivalentes.

*SOLVE*. Este macro-comando é quem efetua a resolução do problema

não-linear de elementos finitos. Em primeiro lugar é chamada a subrotina *PERFIL* que, em função do número atual de graus de liberdade do problema, definirá a altura das colunas que formam o perfil de banda variável da matriz de rigidez do problema em estudo. Posteriormente, é chamada a subrotina homônima deste macro-comando que gerenciará o processo de resolução incremental-iterativo do problema de elementos finitos, segundo foi indicado na seção 4.3.3.

**FEXEC.** Corresponde sempre ao último macro-comando a ser executado. Indica o Final da Execução da análise desenvolvida, fornecendo o valor do tempo total de execução do problema e o tamanho do vetor de trabalho utilizado.

### **5.2.3. Macro-Comandos de Ativação e Desativação de Elementos Bi-Dimensionais**

Para simular etapas de processos construtivos típicas de obras geotécnicas, foi implementada a possibilidade de eliminação de elementos planos da malha de elementos finitos, representando desta forma um processo de escavação, e, por outro lado, considerada a possibilidade de incorporação de novos elementos na malha para conseguir simular, por exemplo, um processo de aterro. As características destes elementos foram previamente apresentadas na seção 2.2.

**ESCAV.** Este comando define a eliminação de elementos da malha permitindo a execução de uma etapa de escavação através da

aplicação das forças nodais equivalentes propostas por Mana (1978), apresentadas previamente na seção 2.3.3. Para cada elemento a ser escavado devem ser fornecidos, como dados de entrada, os números dos pontos nodais que formam o contorno da região a ser escavada e nas quais serão aplicadas as forças calculadas. Os elementos eliminados da malha serão desativados não sendo considerados em nenhuma das análises posteriores. Os pontos nodais da região escavada passam a ser considerados fixos com o que será diminuído o tamanho da matriz de rigidez do problema após a renumeração interna dos graus de liberdade.

**ATERR.** A utilização deste macro-comando permite a ativação de elementos definidos inicialmente como desativados. As características destes elementos (materiais, conectividade dos nós) devem ter sido previamente definidas com o macro-comando *DADOS* da mesma forma que as coordenadas dos seus respectivos pontos nodais. Estes pontos nodais deixarão de ter os seus deslocamentos restritos, procedendo-se à renumeração interna dos graus de liberdade do problema. Diversos procedimentos foram propostos na literatura para simular um processo de aterro (Kulhawy, 1977; Naylor and Pande, 1981). No presente trabalho, o processo de aterro consiste na aplicação das forças nodais equivalentes à pressão exercida por uma nova camada de material, função efetuada com a utilização do macro-comando *CRREG*. O problema é então resolvido através da utilização do comando *SOLVE*, sendo finalmente utilizado o macro-comando *ATERR* para considerar a rigidez da nova camada nas análises posteriores.

#### 5.2.4. Macro-Comandos de Ativação e Desativação de Elementos de Barra

É prática corrente simular a presença de estroncas da estrutura de suporte de uma escavação por meio de elementos planos ou por molas posicionadas no nível correspondente a cada estronca. A simulação de tirantes por sua vez, é frequentemente feita por meio de molas, impossibilitando com isto a correta previsão analítica do comportamento do solo na região do bulbo de tensões gerado pela ancoragem do tirante na massa de solo.

A utilização de elementos de barra com dois pontos nodais (Zienkiewicz, 1977; Cook, 1981) foi adotada neste trabalho para simular tanto a presença de estroncas quanto de tirantes na estrutura de contenção. Neste caso, a utilização de um perfil de banda variável para armazenamento da matriz de rigidez do problema (seção 4.1.3) evita o aumento considerável na quantidade de memória que seria requerido caso se tivesse utilizado a técnica de armazenamento em banda da matriz de rigidez global.

A seguir, será descrita a matriz de rigidez do elemento de barra utilizado. Considere-se o elemento da figura (5.1) e seja  $A$  o valor da área da seção transversal do elemento e  $E$  o seu módulo de elasticidade. A matriz de rigidez  $[K]$  do elemento pode ser obtida conhecendo-se apenas os valores  $A$ ,  $E$  e as coordenadas dos pontos nodais  $i$  e  $j$  que definem o elemento ( $x_i$ ,

$y_i, x_j$  e  $y_j$ ). Considera-se:

$$L = [ (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 ]^{1/2} \quad (5.1)$$

$$s = \sin \beta = \frac{y_j - y_i}{L} \quad (5.2)$$

$$c = \cos \beta = \frac{x_j - x_i}{L} \quad (5.3)$$

A matriz [K] pode ser obtida ativando cada um dos graus de liberdade e mantendo os demais restritos, resultando finalmente em (Cook, 1981):

$$[K] = \frac{A E}{L} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Foi considerada a possibilidade de definir o comportamento de um elemento de barra por meio de uma lei bilinear. Este tipo de comportamento foi adotado para evitar o surgimento de forças de tração em elementos de barra que simulem a presença de estroncas e o aparecimento de forças de compressão em elementos

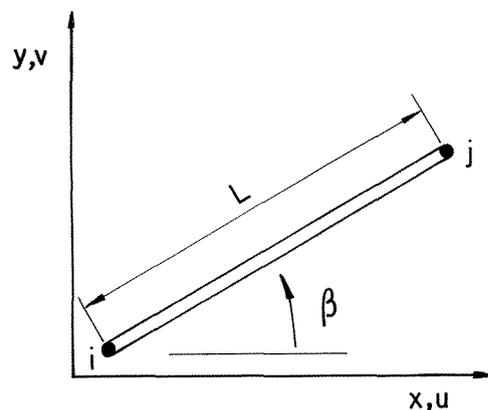


Fig. 5.1 - Elemento de barra com dois pontos nodais

de barra que representem tirantes. A figura (5.2) mostra a lei força-deslocamento correspondente ao comportamento de um elemento de barra simulando uma estronca. Neste caso, apenas uma rigidez desprezível para os efeitos práticos é considerada se o material se encontra tracionado. Os diversos tipos de elementos de barra considerados no programa são caracterizados pela variável *TBAR* onde:

*TBAR* = 1 , representa um material elástico

*TBAR* = 2 , representa o comportamento de uma estronca

*TBAR* = 3 , representa o comportamento de um tirante

Os macro-comandos implementados para proceder à ativação e desativação de elementos de barra são *BARAT* e *BARDE*.

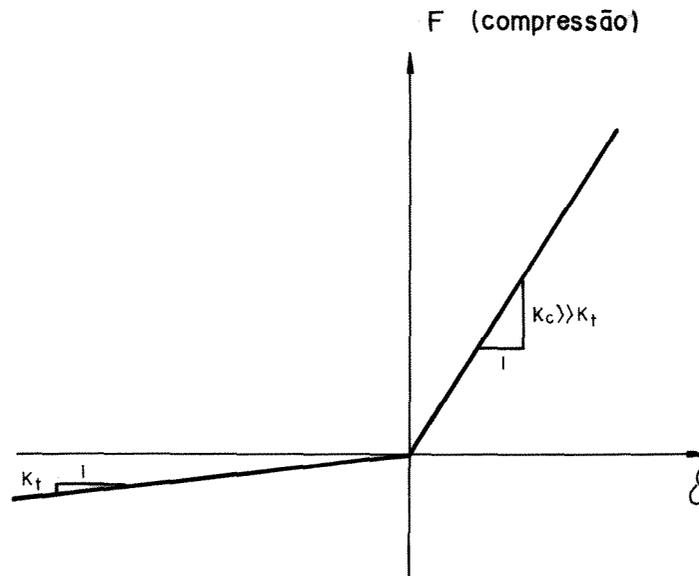
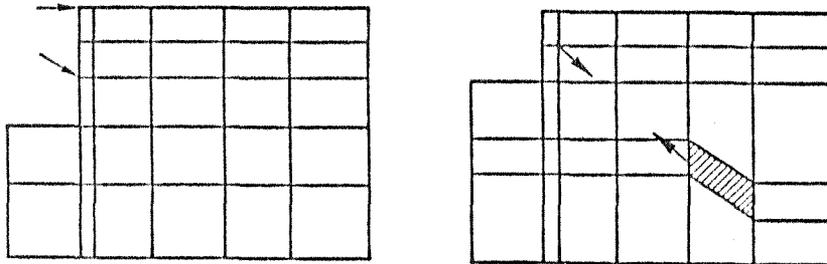


Fig. 5.2 - Lei bilinear correspondente ao comportamento de uma estronca

*BARAT*. Permite a ativação de um elemento de barra considerado inicialmente desativado. O efeito de um pré-esforço tanto numa estronca quanto num tirante, pode ser representado por meio da

aplicação de forças iguais e opostas nos dois pontos nodais que serão conectados pelo elemento de barra unidimensional (figura 5.3). A rigidez do elemento de barra deverá ser considerada apenas na etapa de construção subsequente a ser desenvolvida na análise do problema.



*Fig. 5.3 - Aplicação de pré-esforço no elemento de barra*

**BARDE.** Possibilita a desativação de um elemento de barra. A remoção de uma estronca ou de um tirante pode ser simulada através do cálculo da força nodal equivalente devido à tensão axial presente no elemento de barra e aplicando posteriormente forças de sentido contrário às calculadas sobre os dois pontos nodais do elemento. A rigidez deste elemento passa a ser desconsiderada nas análises posteriores.

#### **5.2.5. Macro-Comandos para Pré-Fixação e Alteração de Variáveis**

Estes comandos permitem atribuir valores determinados a certas variáveis em qualquer etapa da análise em desenvolvimento, permitindo uma fácil manipulação, por parte do usuário, dos valores necessários.

**TINKO.** Possibilita a pré-fixação de um estado de tensões geostático nos elementos planos da malha de elementos finitos para um determinado número de camadas horizontais considerado no problema. O estado de tensão é definido a partir do fornecimento das espessuras das camadas, do seu peso específico e do coeficiente de empuxo em repouso  $K_0$  de cada estrato horizontal. Para cada ponto de Gauss de integração será calculado o valor do estado de tensões definido a partir das expressões (2.39 a), (2.39 b) e (2.39 c). São também calculadas as forças nodais equivalentes ao estado de tensões iniciais (equação 2.40), valores a serem utilizados posteriormente no processo de resolução iterativa do problema.

**TINIS.** Permite pré-definir um estado de Tensões Iniciais Isotrópico nos elementos planos da malha. O estado assim caracterizado possibilita representar, por exemplo, o estado inicial hidrostático de uma amostra de solo anterior ao cisalhamento num ensaio convencional de compressão triaxial. São também definidas, neste caso, as forças nodais equivalentes a este estado inicial de tensões.

**SPPRE.** Este comando possibilita a pré-fixação do nível de tensões correspondente à localização das superfícies de plastificação. Quando não utilizado, os níveis de tensões  $S1MAX(i_{gaus}, i_{elem})$  e  $S2MAX(i_{gaus}, i_{elem})$  corresponderão aos valores máximos alcançados pelas matrizes  $SUP1(i_{gaus}, i_{elem})$  e  $SUP2(i_{gaus}, i_{elem})$ , respectivamente. Em particular, no início de uma análise, os valores destas variáveis são definidos em cada

ponto de Gauss de Integração, pelo estado de tensões iniciais do problema, ou seja, considerando o material como normalmente adensado. Caso os elementos estejam caracterizados por um material pré-adensado, os níveis de tensões das superfícies de plastificação poderão ser pré-fixados em valores maiores aos correspondentes ao estado inicial de tensões através da utilização deste macro-comando.

**MUDMT.** Permite a mudança do material de certo(s) elemento(s) numa determinada etapa do problema em análise. Este comando é utilizado, por exemplo, para mudar os parâmetros de um elemento de solo, em parâmetros que caracterizam o comportamento da parede de contenção de uma escavação.

**ALTCB.** Este macro-comando possibilita a alteração das condições de borda inicialmente fixadas para o problema. A renumeração interna dos graus de liberdade é efetuada posteriormente, no caso em que um grau de liberdade inicialmente restrito passa a poder se deslocar e vice-versa.

**ZDESL.** Zera a matriz que armazena os deslocamentos totais. Em princípio, os deslocamentos obtidos após duas análises sucessivas por elementos finitos, correspondem aos valores totais, soma dos deslocamentos originados nas duas etapas do problema. Caso se deseje analisar apenas o valor dos deslocamentos da segunda análise, os valores originados na primeira delas poderão ser zerados com o uso deste macro-comando.

### 5.2.6. Macro-Comandos de Leitura e Criação de Arquivos

**LFORN.** Este macro-comando permite a leitura dos valores das forças externas aplicadas nos pontos nodais. Estes valores são impressos, para cada grau de liberdade, no arquivo de saída do problema em estudo.

**LVETT.** Possibilita a leitura do vetor de trabalho total do problema, sendo normalmente utilizado apenas em fases de implementação e teste do programa.

**CARIN.** Permite a Criação de um ARquivo INtermediário numa determinada etapa do problema em análise. Os parâmetros de controle do problema junto com a totalidade do vetor de trabalho são armazenados num arquivo não-formatado.

**LARIN.** Possibilita a Leitura de um ARquivo INtermediário previamente criado pelo macro-comando *CARIN*. Desta forma, os parâmetros de controle e o vetor de trabalho do problema que definiu o arquivo intermediário são novamente armazenados, permitindo a continuação da análise anterior. A utilização dos comandos *CARIN* e *LARIN* se torna vantajosa para a análise dos resultados intermediários de um problema consistente em várias etapas onde cada uma delas dispense um elevado tempo de processamento.

**CGRAF.** Permite a criação dos arquivos necessários para o

pós-processamento gráfico dos resultados. O tratamento gráfico dos valores obtidos numa análise se torna uma providência indispensável para a correta interpretação dos resultados quando o problema possui um número elevado de graus de liberdade. A partir dos arquivos criados por este macro-comando, o programa *GRAFOG* aqui desenvolvido permitirá representar graficamente o campo de deslocamentos considerando os resultados definidos em cada ponto nodal da malha de elementos finitos utilizada, assim como as tensões principais obtidas para cada ponto de integração do problema.

### 5.3 ESTRUTURA DO PROGRAMA

#### 5.3.1 Organização das Subrotinas

A figura (5.4) mostra a árvore de subrotinas e funções (Function) da versão atual do programa *ANLOG*. Um total de 52 subprogramas constituem o código total.

O programa principal (*ANLOG*) efetua apenas o gerenciamento das subrotinas de acordo com os macro-comandos fornecidos pelo usuário. Assim, as subrotinas *DADOS*, *ALTCB*, *ATERR*, *CRREG*, *TINKO*, *TINIS*, *ESCAV*, *CGRAF*, *MUDMT*, *BARAT*, *BARDE*, *LVETT*, *LFORN*, *LARIN*, *CARIN*, *FEXEC*, *SPPRE* e *ZDESL* são chamadas pelo programa principal para desenvolver as funções correspondentes aos macro-comandos homônimos fornecidos pelo usuário. As subrotinas *PERFIL* e *SOLVE* (nesta ordem) são chamadas quando fornecido o macro-comando *SOLVE*.

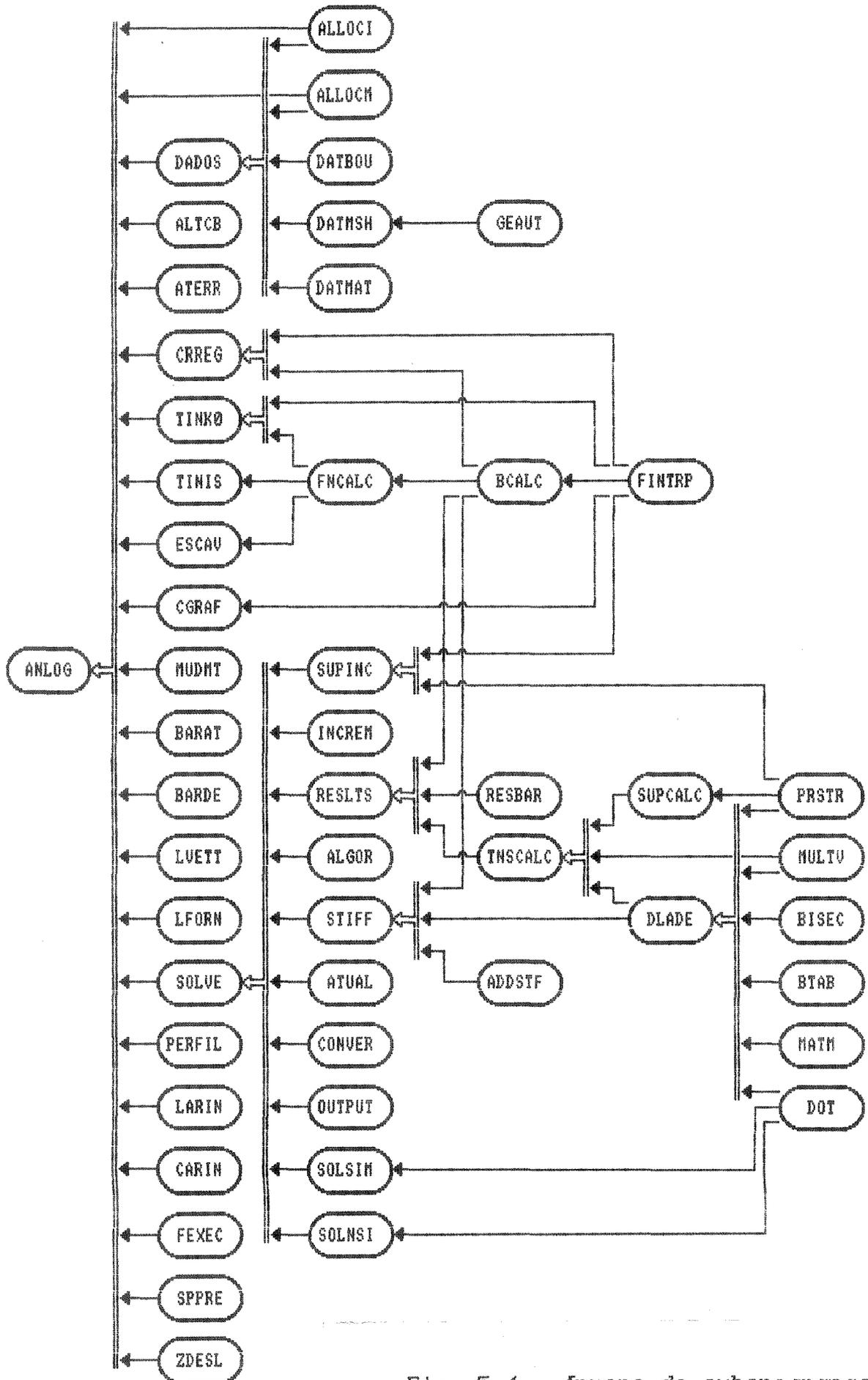


Fig. 5.4 - Arvore de subprogramas

A subrotina *ALLOCI* e a função *ALLOCM* procedem a alocação dinâmica das variáveis a serem apresentadas na seção seguinte, acusando a eventual falta de memória necessária para resolução de um problema.

As subrotinas *DATBOU*, *DATMSH* e *DATMAT* possibilitam, como é sugerido pelos seus nomes, a leitura dos dados das condições de contorno, dos dados da malha de elementos finitos e dos parâmetros dos materiais utilizados. *GEAUT* permite a geração automática da malha ou de parte dela.

A subrotina *SOLVE* gerencia a chamada das subrotinas *SUPINC*, *INCREM*, *RESLTS*, *ALGOR*, *STIFF*, *ATUAL*, *CONVER*, *OUTPUT*, *SOLSIM*, *SOLNSI* cujas funções foram explicitadas na seção 4.3.3.

Nos níveis mais baixos da árvore de subprogramas, a subrotina *FN CALC* efetua o cálculo das forças nodais equivalentes ao estado de tensões iniciais de cada elemento (equação 2.40). A subrotina *BCALC* define a matriz deformação-deslocamento de cada elemento (seção 2.2.5) e a subrotina *FINTRP* procede ao cálculo das funções de interpolação necessárias (seção 2.2.3).

A subrotina *RESBAR* é quem calcula, a partir dos deslocamentos dos pontos nodais, a força resultante nos elementos de barra. *TNSCALC*, por outro lado, procede ao cálculo das tensões finais e das forças residuais nos elementos isoparamétricos de 8 nós. A subrotina *ADDSTF* efetua a montagem

da matriz de rigidez de cada elemento na matriz de rigidez global do problema.

A subrotina *SUPCALC* (seção 4.3.3) atualiza os valores do tipo de carregamento *ILOAD(i Gauss, i elem)* e dos níveis de tensões correspondentes às superfícies de plastificação *SUP1(i Gauss, i elem)* e *SUP2(i Gauss, i elem)*. A subrotina *DLADE* (seção 4.2) define a matriz constitutiva correspondente aos modelos elasto-plásticos de Lade (1977, 1979), sendo também utilizada para definir a matriz constitutiva de materiais elásticos.

A subrotina *PRSTR* calcula o valor das tensões principais num ponto de integração. *BISEC* fornece o valor do trabalho plástico expansivo calculado como a solução da equação transcendental (3.33) para um dado valor do nível de tensões expansivas  $f_p$ . *MULTV*, *BTAB* e *MATM* são subrotinas que desenvolvem os produtos matriciais necessários e a função *DOT* efetua o produto interno de dois vetores. As subrotinas *RZERO* e *IZERO* (que não aparecessem na figura 5.4) zeram os valores armazenados em matrizes e vetores reais ou inteiros, respectivamente.

### 5.3.2 Organização das Variáveis do Programa

Como já foi dito, utilizou-se um esquema de alocação dinâmica para armazenar todas as matrizes e vetores do programa num único vetor de trabalho. Na linguagem *FORTRAN* de programação, o armazenamento das matrizes e vetores é efetuado

no momento da compilação do programa e, portanto, as dimensões de todos os arranjos devem ser especificadas numericamente no próprio código do programa. Este fato origina frequentes modificações nos códigos, já que as dimensões devem ser permanentemente corrigidas para adequá-las a cada caso em estudo. Uma forma de evitar este inconveniente consiste em armazenar em forma unidimensional num vetor de trabalho todas as matrizes. Assim, uma matriz  $m \times n$  passa a ser armazenada em  $mn$  posições do vetor unidimensional. Este esquema de armazenamento evita as constantes modificações no programa para cada caso a ser analisado e conduz geralmente a uma economia na quantidade de memória necessária.

A capacidade total de memória do programa *ANLOG* é caracterizada pela variável *MEMORY* definida no corpo principal do programa por meio de um comando *PARAMETER* (Hehl, 1986). O vetor de trabalho do programa consiste num vetor denominado *IV*, que compartilha da mesma área de memória reservada para o vetor *RV* por meio do uso de um comando *EQUIVALENCE* (Hehl, 1986). Utilizando a primeira denominação deste vetor serão armazenadas as matrizes e vetores inteiros, enquanto que sob o segundo nome serão armazenados os conjuntos reais do programa.

O tamanho máximo da variável *MEMORY* é condicionado pela capacidade de memória do equipamento utilizado. Para aumentar a memória disponível para a resolução de um problema, caso este seja processado no CDC Cyber 175-835, considerou-se a possibilidade de proceder à segmentação do código do programa.

Com isto, a quantidade de memória ocupada pelo próprio código resulta reduzida. Este procedimento tem a vantagem adicional de não precisar de nenhuma modificação na fonte do programa para a sua utilização. Precisa-se apenas da criação de um arquivo que defina os níveis de subrotinas e functions correspondentes à árvore indicada na figura (5.4). Estes níveis foram definidos no arquivo *ARVN* para a versão atual do programa *ANLOG*.

Cada um dos conjuntos deste programa, indicados na tabela (5.1), é dimensionado para o tamanho exato requisitado por cada problema utilizando-se um conjunto de ponteiros para definir a

*Tabela 5.1*  
*Variáveis Alocadas Dinamicamente no Vetor de Trabalho*

<i>VARIÁVEL(dimens.)</i>	Descrição
<i>XGL(npoin,2)</i>	Coordenadas globais dos pontos nodais
<i>KELEM(nelem,9)</i>	Matriz de incidências nodais de cada elemento e número do material correspondente
<i>MTCOD(nmats)</i>	Código que define o modelo constitutivo de cada material
<i>PROPS(nprop,nmats)</i>	Conjunto de parâmetros do modelo utilizado por cada material
<i>STRES(4,4,nelem)</i>	Tensões em cada ponto de integração
<i>ID(2,npoin)</i>	Numeração dos graus de liberdade de cada problema
<i>XLOAD(2,npoin)</i>	Cargas externas aplicadas
<i>FOEXT(2,npoin)</i>	Forças externas totais aplicadas aos pontos nodais
<i>FOINT(2,npoin)</i>	Forças internas exercidas pelos pontos nodais

Tabela 5.1 (Cont.)

VARIÁVEL(dimens.)	Descrição
DEF(4,4,nelem)	Deformações em cada ponto de integração
DESL(2,npoin)	Deslocamentos totais em cada ponto nodal
ILOADC(4,nelem)	Tipo de carregamento em cada ponto de Gauss
SUP1(4,nelem)	Nível de tensões correspondente à superfície de plast. (1), calculado para o estado atual de tensões
S1MAX(4,nelem)	Nível de tensões que define a localização da superfície de plastificação (1)
SUP2(4,nelem)	Nível de tensões correspondente à superfície de plast. (2), calculado para o estado atual de tensões
S2MAX(4,nelem)	Nível de tensões que define a localização da superfície de plastificação (2)
JDIAG(neq)	Localização dos elementos da diagonal principal na matriz de rigidez
DELTA(neq)	Incremento de cargas externas aplicadas (antes da resolução) e incremento de deslocamentos (após a resolução)
STIFS(nperfl)	Perfil da parte triangular superior da matriz de rigidez
STIFI(nperfl)	Perfil da parte triangular inferior da matriz de rigidez
npoin	Número de pontos nodais
nelem	Número de elementos
nmats	Número de materiais
nprop	Número máximo de parâmetros dos materiais necessário
neq	Número de equações do problema
nperfl	Tamanho do perfil da matriz de rigidez do problema

sua localização no vetor de trabalho. Como foi dito, o programa verificará a existência de memória suficiente para a resolução de cada problema, sendo indicada uma mensagem de erro caso não exista espaço suficiente.

A figura (5.5) mostra a distribuição dos ponteiros no vetor de trabalho utilizado. A definição destes ponteiros desde o início do vetor de trabalho até a posição do ponteiro *KREFER* (ponteiro de referência) é efetuada pelo programa durante a execução do macro-comando *DADOS*, permanecendo invariável ao longo das diferentes etapas da análise. A cada execução do macro-comando *SOLVE*, os valores armazenados no vetor de trabalho entre os ponteiros *KREFER* e *KFINAL* são zerados e a localização dos ponteiros desta região do vetor será redefinida de acordo com o número de graus de liberdade da etapa do problema em análise. Dependendo das características do problema, nem todos os vetores indicados na tabela (5.1) serão utilizados. Neste caso, o espaço de memória não será reservado, segundo indicado na figura (5.5).

## 5.4 ANÁLISES PRELIMINARES

### 5.4.1 Verificação da Implementação de Elementos Bidimensionais

A distribuição de tensões num cilindro vazado de superfície interna  $r = a$  e superfície exterior  $r = b$  submetido a pressões constantes  $p$  e  $q$  aplicadas nestas superfícies internas e externas respectivamente, constitui um problema

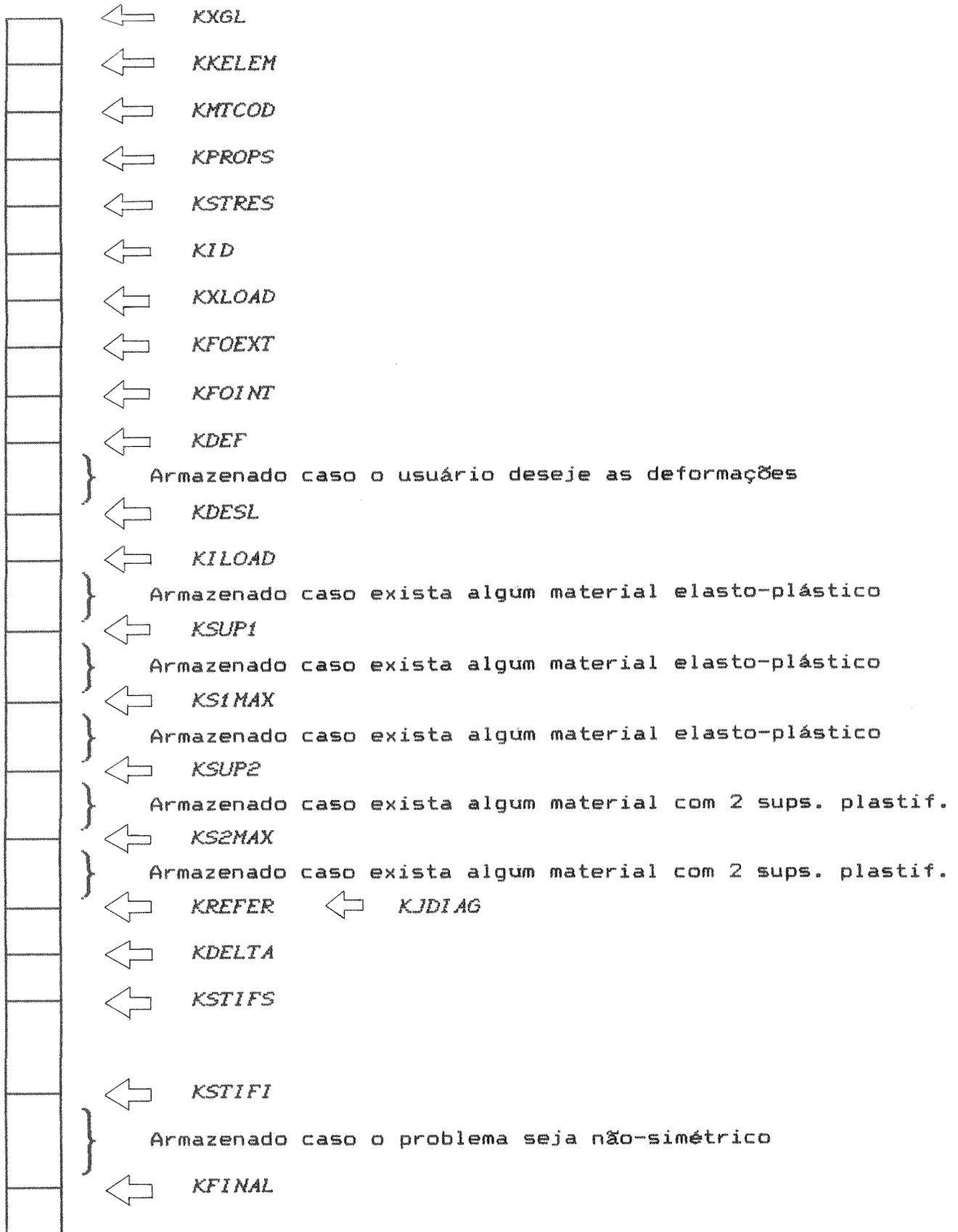


Fig. 5.5 - Localização dos ponteiros no vetor de trabalho

clássico da teoria da elasticidade (Westergaard, 1964; Timoshenko and Goodier, 1970). Este problema elástico de solução analítica conhecida foi escolhido para verificar a implementação do processo de resolução para o caso de elementos bidimensionais no programa ANLOG.

A distribuição de tensões radiais,  $\sigma_r$ , e tangenciais,  $\sigma_\theta$ , neste problema axissimétrico é definida pelas expressões:

$$\sigma_r = -p \frac{(b^2/r^2) - 1}{(b^2/a^2) - 1} - q \frac{1 - (a^2/r^2)}{1 - (a^2/b^2)} \quad (5.5)$$

$$\sigma_\theta = p \frac{(b^2/r^2) + 1}{(b^2/a^2) - 1} - q \frac{1 + (a^2/r^2)}{1 - (a^2/b^2)} \quad (5.6)$$

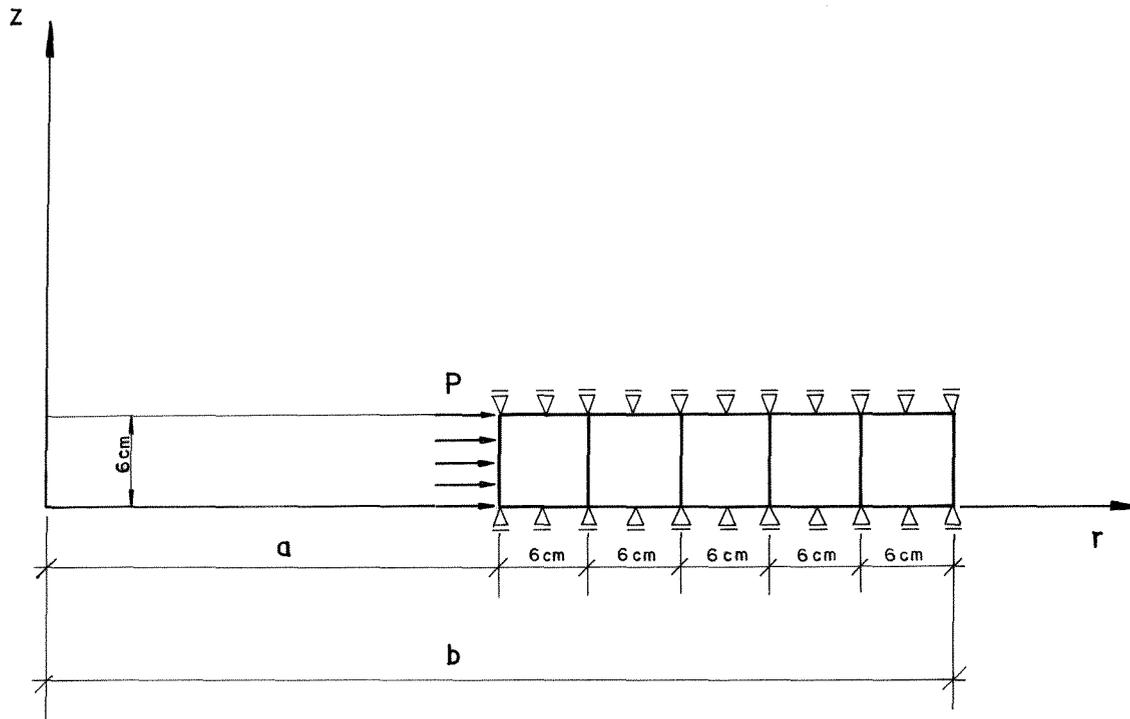
Se as deformações na direção axial se consideram impedidas ( $\varepsilon_z = 0.0$ ) a distribuição dos deslocamentos radiais,  $\delta_r$ , e o valor das tensões axiais,  $\sigma_z$ , serão:

$$\delta_r = \frac{r(1+\nu)}{E} \left[ p \frac{(b^2/r^2) + (1-2\nu)}{(b^2/a^2) - 1} - q \frac{(1-2\nu) - (a^2/r^2)}{1 - (a^2/b^2)} \right] \quad (5.7)$$

$$\sigma_z = \nu (\sigma_r + \sigma_\theta) \quad (5.8)$$

onde  $\nu$  é o coeficiente de Poisson do material e  $E$  o seu módulo de elasticidade.

Os dados do problema analisado e a malha de elementos finitos utilizada para a resolução numérica deste problema axissimétrico estão indicados na figura (5.6).



$$\begin{aligned}
 a &= 30 \text{ cm} & E &= 2000 \text{ kg/cm}^2 \\
 b &= 60 \text{ cm} & \nu &= 0.3 \\
 P &= 2 \text{ kg/cm}^2
 \end{aligned}$$

Fig. 5.6 - Malha de elementos finitos utilizada para análise de um cilindro vazado elástico

Na figura (5.7) são comparadas a distribuição de tensões  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  e  $\sigma_z$  na direção radial obtidas analiticamente, com os vetores definidos numericamente em cada ponto de Gauss da malha de elementos finitos utilizada. Os resultados podem ser considerados idênticos.

A figura (5.8) mostra a distribuição dos deslocamentos radiais obtidos numérica e analiticamente. Uma clara concordância pode ser observada também neste caso.

Estes resultados servem para certificar, portanto, a correta implementação dos elementos bidimensionais no programa ANLOG.

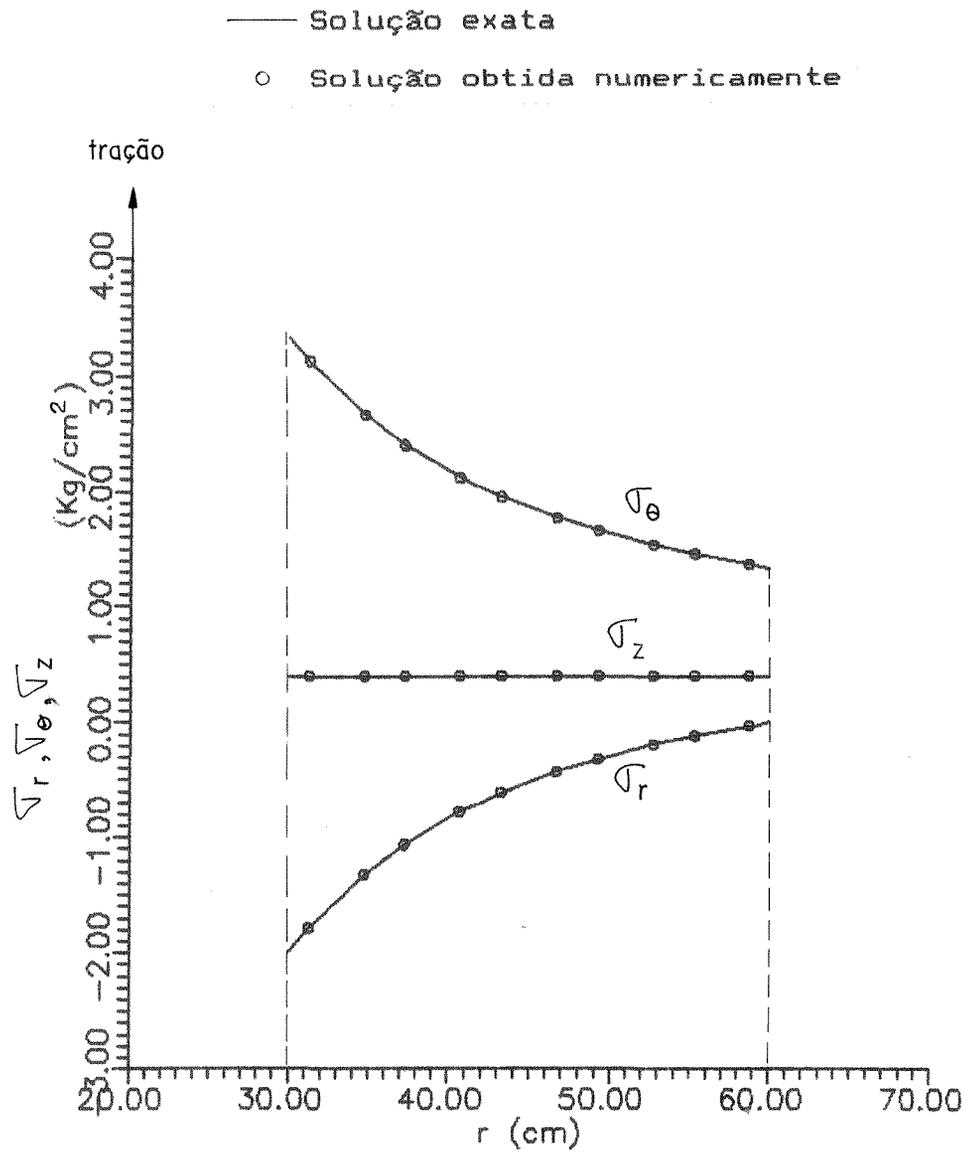


Fig. 5.7 - Distribuição de tensões obtida numericamente e analiticamente

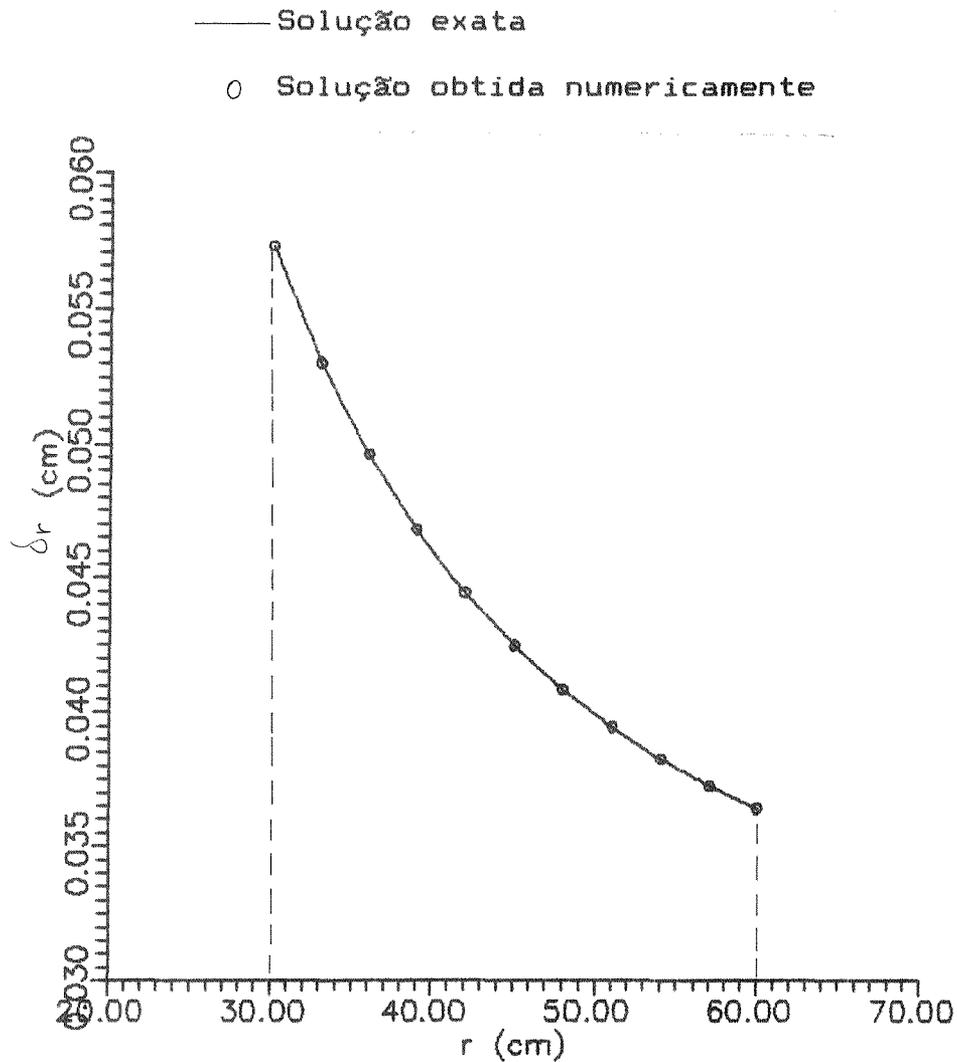


Fig. 5.8 - Deslocamentos radiais obtidos numericamente e analiticamente

#### 5.4.2 Verificação da Implementação de Elementos de Barra

A verificação da implementação do elemento de barra utilizado no programa foi efetuado através do exemplo apresentado na figura (5.9). Considerou-se um comportamento força-deslocamento linear ou bilinear (figura 5.2) tanto para o caso da simulação de tirantes quanto para representar estroncas. A força  $P$  indicada na figura foi considerada como força de tração ou de compressão, tendo sido também considerada

a possibilidade de pré-esforço nestes elementos de barra. Os resultados analíticos foram idênticos aos resultados numéricos obtidos em todos os casos considerados. A não-linearidade deste problema simples foi resolvido com as diferentes técnicas incremental-iterativas implementadas, permitindo assim a sua verificação.

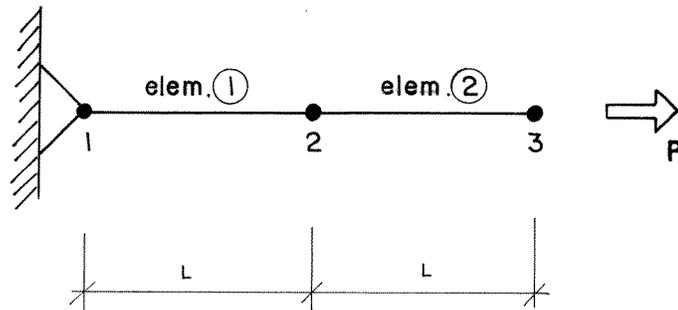


Fig. 5.9 - Elemento de barra solicitado pela força  $P$

#### 5.4.3 Verificação da Implementação do Processo de Escavação

Para verificar a implementação do processo de escavação efetuou-se a verificação da Condição de Unicidade, previamente mencionada na seção 2.3.3, que se aplica no caso do material ser linear e elástico. Desta forma, foi feito um estudo no qual analisou-se uma escavação executada num meio linear elástico efetuando-a, em primeiro lugar, por meio de uma única etapa e, posteriormente, desenvolvendo-a através de três etapas de escavação. Uma terceira análise foi efetuada, na qual, em cada uma das três etapas de escavação da análise anterior era ativado um nível de estroncas e, após alcançado o fundo da escavação, procedeu-se à desativação de cada um destes níveis.

Em se tratando de um meio elástico onde o estado final alcançado nos três problemas considerados é o mesmo, as tensões e deslocamentos obtidos no final do processo deverão ser idênticos. A figura (5.10) mostra a malha de elementos finitos e os dados do problema analisado.

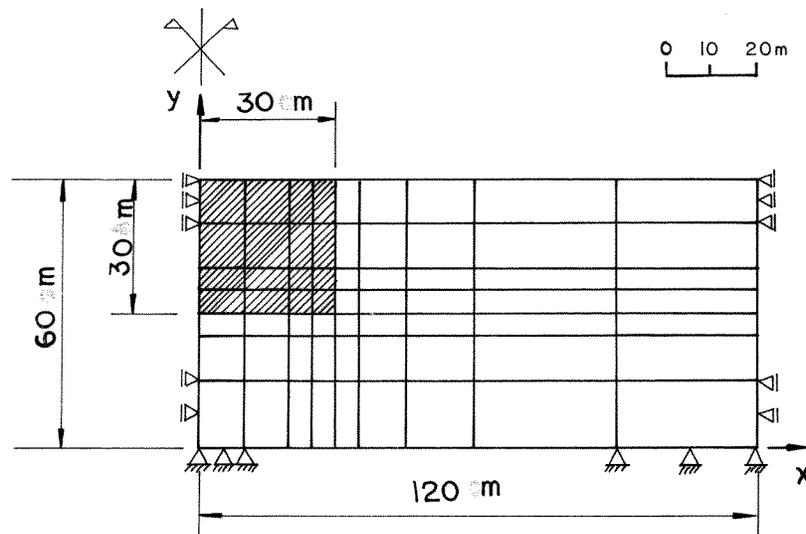


Fig. 5.10 - Malha de elementos finitos utilizada para verificar o processo de escavação

A análise dos deslocamentos obtidos nos pontos nodais da malha e o valor das tensões definidas nos pontos de Gauss de Integração mostrou que a Condição de Unicidade é plenamente satisfeita, já que todos os valores obtidos foram idênticos nos três problemas propostos.

A malha de elementos finitos escolhida para a análise foi propositadamente igual à utilizada por Mana (1978). Os resultados aqui obtidos são praticamente idênticos aos resultados obtidos por Mana (1978, pag. 80). Os deslocamentos

horizontais obtidos neste trabalho e os definidos por Mana (1978), para a linha correspondente à fase da escavação, estão apresentadas na figura (5.11). A figura (5.12) mostra este mesmo tipo de comparação considerando agora o levantamento de fundo e o recalque na superfície. Pode-se concluir, portanto, que a simulação do processo de escavação está corretamente implementada no programa *ANLOG*.

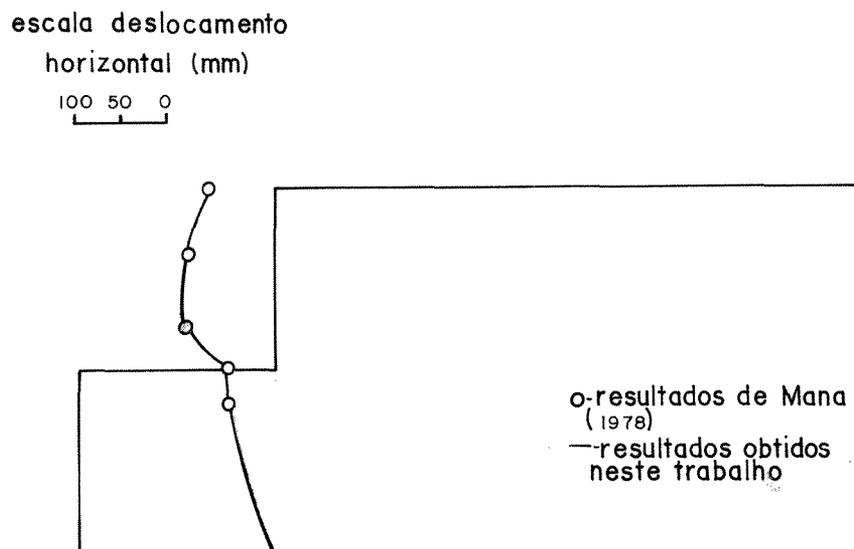


Fig. 5.11 - Deslocamentos horizontais

#### 5.4.4 Verificação da Implementação das Relações Constitutivas

O modelo elasto-plástico implementado no programa pode ser testado comparando resultados fornecidos através da integração das equações da lei constitutiva para trajetórias de tensões conhecidas, com os valores obtidos com a utilização do programa.

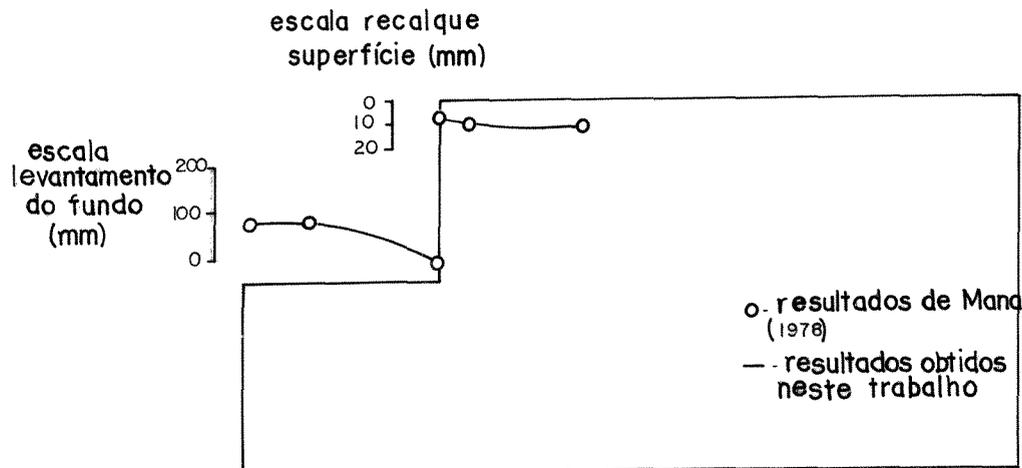


Fig. 5.12 - Levantamento de fundo e recalque superficial

Para uma determinada trajetória de tensões, o incremento de deformações elásticas, plásticas colapsíveis e plásticas expansivas do modelo de Lade (1977, 1979) poderão ser obtidas através da utilização da lei de Hooke, da expressão (3.21) e da expressão (3.32), respectivamente. O processo de integração necessário para obtenção da resposta do modelo para uma determinada trajetória de tensões se encontra implementado computacionalmente no programa LAEDIR (Azevedo, 1983).

Os parâmetros elasto-plásticos da areia utilizada na análise desenvolvida no capítulo 6 foram considerados para definir diretamente e por meio da utilização do programa as curvas tensão-deformação correspondentes a um ensaio convencional de compressão triaxial. A figura (5.13) mostra as características do problema a ser analisado. A figura (5.14) mostra a malha de elementos finitos utilizada para a representação numérica deste problema que consta, como se vê, de um único elemento axissimétrico. A figura (5.15) mostra os

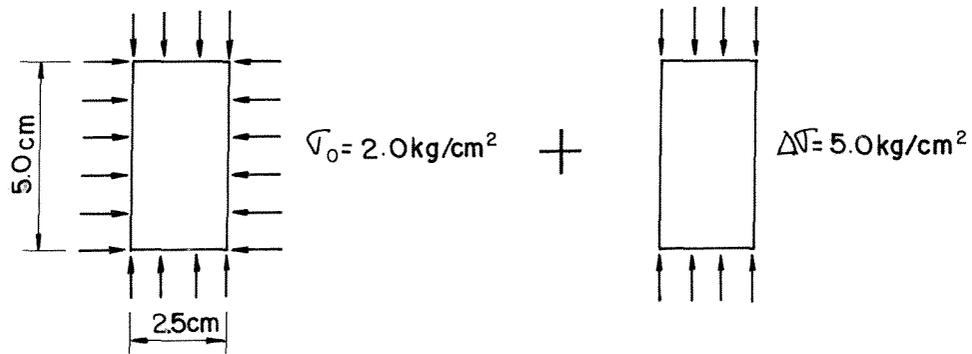


Fig. 5.13 - Ensaio CTC a ser analisado

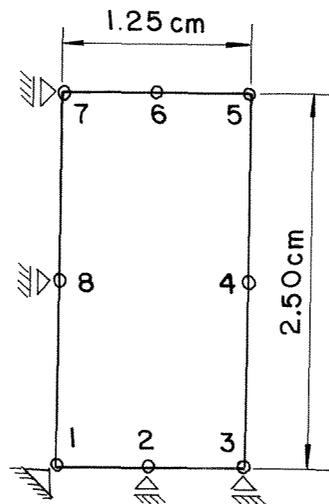


Fig. 5.14 - Elemento utilizado para simulação numérica do ensaio CTC

valores obtidos nas representações numéricas e analíticas do ensaio CTC em estudo. Os resultados numéricos apresentados foram obtidos com a utilização do Método Newton-Raphson Standard considerando a matriz constitutiva não-simétrica do modelo. Os resultados observados são idênticos, tanto na representação da tensão desviadora quanto da deformação

volumétrica, concluindo-se que o modelo constitutivo foi corretamente implementado.

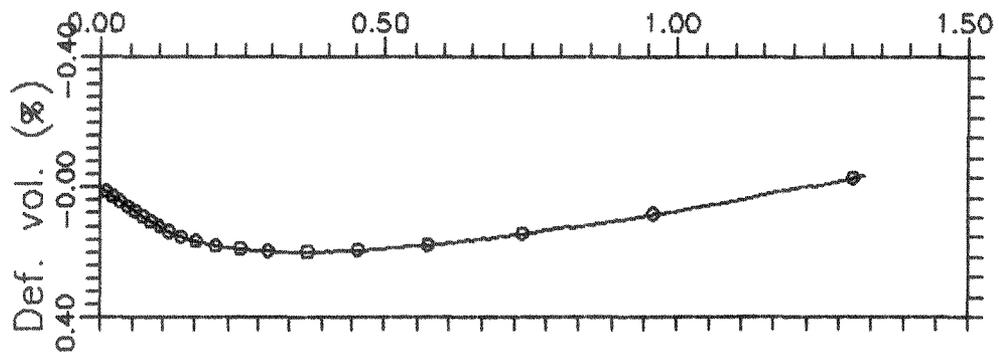
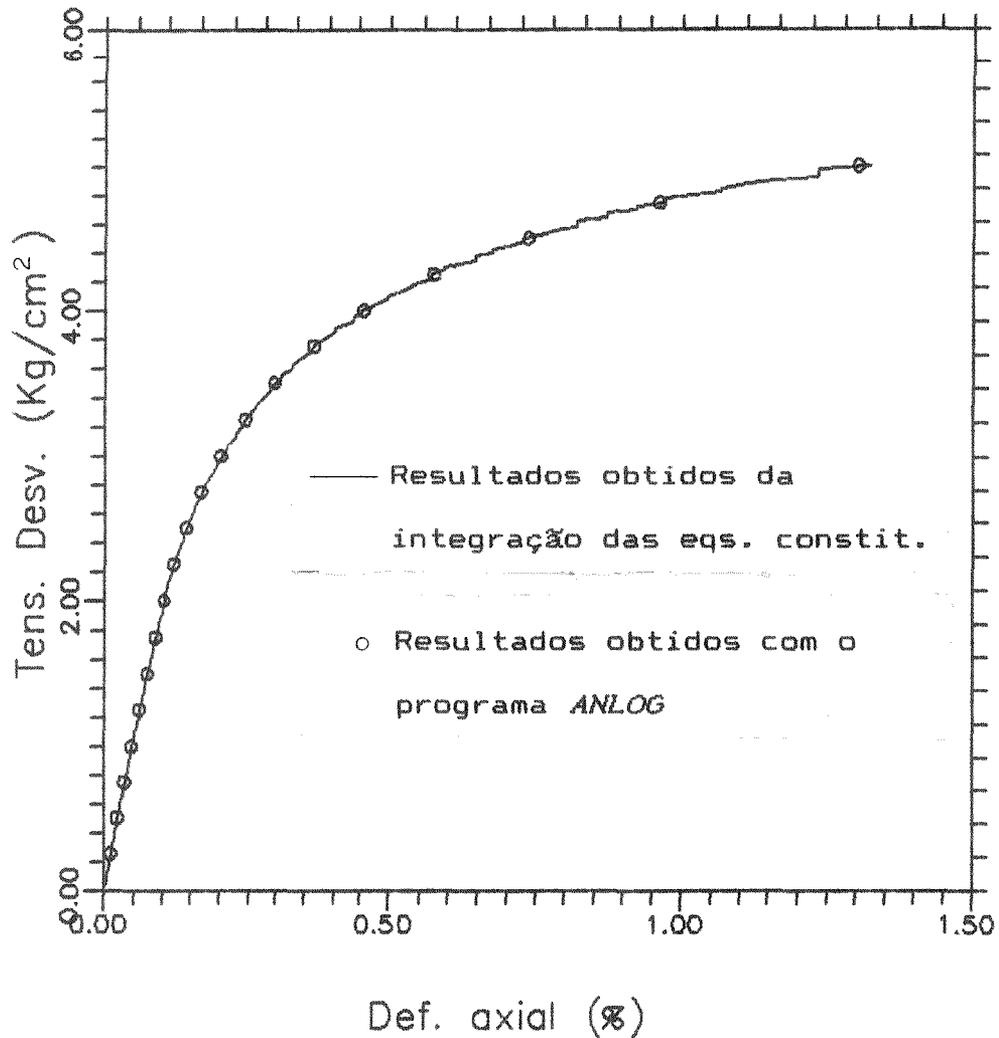


Fig. 5.15 - Comparação de resultados obtidos na verificação da implementação das relações constitutivas

Este problema axissimétrico foi analisado com as diferentes técnicas de resolução incremental-iterativas implementadas no programa *ANLOG*. Os resultados finais obtidos através da utilização de cada uma destas técnicas foram os mesmos, o que permitiu verificar a implementação das diversas abordagens de um problema não-linear aqui consideradas. Os tempos de processamento consumidos para a resolução deste problema com os diferentes métodos considerados na seção 4.3.3 são apresentados na tabela (5.2). Uma análise da eficiência destes métodos, considerando os valores indicados na tabela, sugere que a eficiência da técnica pela qual a matriz de rigidez é calculada apenas no início da análise é francamente inferior que a dos métodos restantes nos quais o tempo de processamento é semelhante. O melhor desempenho foi observado no método em que a matriz de rigidez é recalculada na segunda iteração de cada incremento de carga.

*Tabela 5.2*

*Tempos de processamento para diferentes métodos de Resolução do problema não-linear (\*)*

Método de Resolução	Tempo de Process.
Rigidez inicial	124.068 s.CPU
Newton-Raphson Standard	33.332 s.CPU
Newton-Raphson Modificado (a)	33.207 s.CPU
Newton-Raphson Modificado (b)	28.420 s.CPU

(\*)Processam. no CDC Cyber 170-985

Foi também analisada a eficiência, para a resolução deste problema, das diferentes técnicas de simetrização apresentadas na seção 4.2.2. Para uma melhor comparação dos tempos de processamento evitou-se, neste caso, levar à ruptura o único elemento utilizado neste problema considerando a aplicação de uma tensão desviadora de  $2 \text{ Kg/cm}^2$ . Em todos os casos, foi utilizado o método de Newton-Raphson Standard para resolução do problema não-linear. Os tempos de processamento consumidos estão indicados na tabela (5.3). A utilização do material associado equivalente conduziu a uma análise pouco eficiente devido, provavelmente, à elevada não-associatividade do material utilizado neste estudo. O tempo de processamento gasto com a utilização da técnica da matriz constitutiva simétrica média foi pouco menor do que o necessário caso se utilize a matriz não-simétrica. Além da economia de tempo observada com a utilização desta última técnica, é importante destacar que o seu uso conduz, por outro lado, a uma grande economia de memória.

*Tabela 5.3*

*Tempos de processamento para diferentes técnicas de simetrização da matriz de rigidez (\*)*

Método de Simetrização	Tempo de Process.
Material associado equivalente	80.725 s.CPU
Matriz const. simétrica média	7.635 s.CPU
Matriz elástica	38.441 s.CPU
Nenhum (Matriz não-simétrica)	9.352 s.CPU

(\*)Processam. no CDC Cyber 170-385

## CAPÍTULO 6

### ANÁLISE DE UM CASO DE RUPTURA

#### 6.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Tendo em parte o propósito de simplificar os métodos de cálculo, tem sido prática corrente em mecânica dos solos (Terzaghi, 1943) separar os problemas em geotecnia segundo se tratem de problemas de deslocamentos ou de ruptura. Exemplos característicos do primeiro grupo são o cálculo, com base na elasticidade linear, dos deslocamentos de uma sapata ou de um muro de arrimo. No segundo grupo, problemas como o cálculo da capacidade de carga de uma fundação ou da estabilidade à ruptura de um talude são tratados no domínio da plasticidade. Esta abordagem desconexa pode ser evitada com a utilização de um modelo elasto-plástico através de elementos finitos já que, neste caso, uma relação única tensão-deformação-resistência define o comportamento do solo.

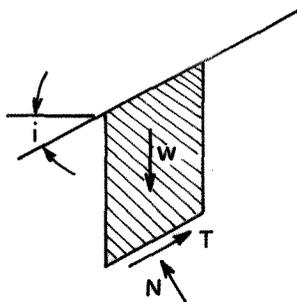
A superfície de ruptura do talude de uma escavação executada num solo sem coesão é definida, com base nos conceitos de equilíbrio limite, pelo ângulo de atrito do solo (Scott,1963; Lambe and Whitman,1969). Este clássico exemplo de ruptura pode ser utilizado para a verificação teórica dos resultados obtidos numa análise por elementos finitos que pretenda representar corretamente o desenvolvimento dos mecanismos de ruptura do solo.

A seguir, serão apresentados os resultados do caso de ruptura mencionado, obtidos através da utilização do modelo de Lade em elementos finitos (Zornberg e Azevedo, 1988). A escavação a céu aberto analisada, efetuada numa centrífuga utilizando um material sem coesão, executou-se com um talude cuja inclinação inicial era maior do que o ângulo de repouso do material. Para o estudo deste problema, será comparada a cunha de ruptura teórica com a definida através da utilização do modelo de Lade. Por outro lado, serão estabelecidas considerações em relação à variação do peso específico do material, à definição de ângulos iniciais estáveis para o talude e à convergência dos resultados obtidos. Serão igualmente apresentadas as zonas de ruptura definidas segundo o modelo hiperbólico de Duncan e Chang (1970). Finalmente, com base numa análise dos resultados obtidos com o modelo de Lade, estabelecer-se-á uma caracterização das diferentes trajetórias de tensões envolvidas na escavação e uma avaliação do fator de segurança à ruptura.

## 6.2 RESOLUÇÃO DO PROBLEMA POR ANÁLISE DE EQUILÍBRIO LIMITE

Para o caso de um solo sem coesão, uma análise por equilíbrio limite permite facilmente definir a condição de ruptura do problema em estudo com base na análise de um talude infinito em areia. Segundo pode ser verificado na figura (6.1), se a resistência ao cisalhamento é mobilizada de forma que  $T = N \operatorname{tg} \phi$ , para este caso limite se terá  $i = \phi$ . Sendo que, para este talude, o fator de segurança é usualmente definido como sendo:

$$FS = \operatorname{tg} \phi / \operatorname{tg} i \quad (6.1)$$



$$\begin{aligned} N &= W \cdot \cos i \\ T &= W \cdot \sin i \\ \therefore T &= N \cdot \operatorname{tg} i \end{aligned}$$

Fig. 6.1 - Análise do equilíbrio de um talude infinito

Os resultados da análise numérica do talude de escavação foram obtidos com a malha indicada na figura (6.2). Os parâmetros do material utilizado foram os estabelecidos por Azevedo (1983) no solo denominado Boulder Sand. Em relação à caracterização da ruptura no modelo de Lade (1977) definida pela equação (3.25) deve se ressaltar que a envoltória de resistência do modelo não consegue representar a presença de coesão no material.

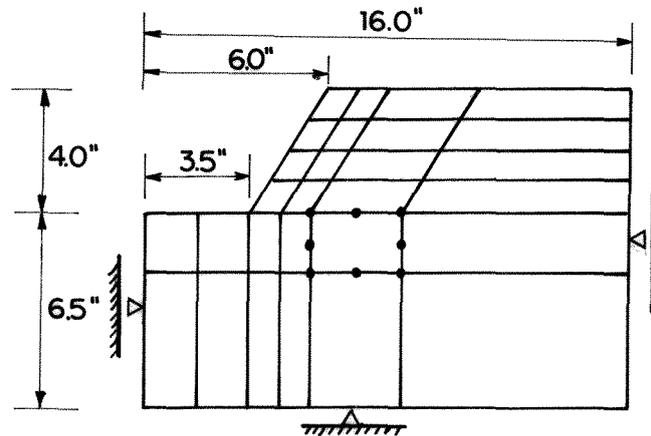


Fig. 6.2 - Malha de elementos finitos utilizada

O critério adotado no programa aqui desenvolvido para evitar a singularidade da matriz de rigidez global do sistema no caso de formação de um mecanismo de ruptura, consiste em manter uma pequena rigidez (correspondente, por exemplo, a 98% do nível de tensões na ruptura) nos pontos de Gauss que atingem a ruptura.

É importante destacar que no caso de desenvolvimento de mecanismos de ruptura, a malha de elementos finitos apresentará elementos de rigidez elevada (elementos que não romperam) e, conjuntamente, elementos de rigidez comparativamente pequena (elementos que atingiram a ruptura). Uma malha cujos elementos possuem valores de rigidez muito diferentes poderá conduzir a um sistema de equações mal-condicionado dependendo da localização na malha da região de baixa rigidez. De fato, um sistema com elementos de rigidez elevada suportado por elementos de rigidez comparativamente menor pode apresentar

problemas numéricos, já que informações essenciais são perdidas por truncamento (Cook,1981). Isso não acontece no caso dos elementos de rigidez baixa serem suportados por elementos de grande rigidez, situação que corresponde à malha do presente estudo (figura 6.3 a).

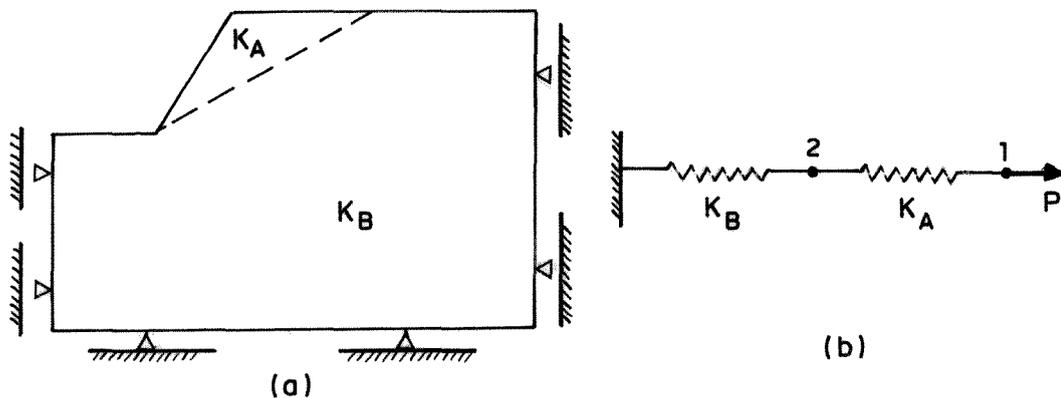


Fig. 6.3 - a) Elementos de elevada rigidez ( $K_B$ ) e de baixa rigidez ( $K_A$ ) na escavação  
b) Estrutura unidimensional com elementos de rigidez  $K_A$  e  $K_B$

No exemplo unidimensional apresentado na figura (6.3 b), considerando a resolução do sistema através do processo de eliminação de Gauss, verifica-se que podem ser perdidas informações necessárias para a obtenção de uma solução precisa se  $K_A \gg K_B$ , mas isso não acontece se  $K_B \gg K_A$ . O número de condição, magnitude que avalia o mal condicionamento da matriz de rigidez, é elevado no primeiro caso, porém, apresenta valores baixos no segundo. O número de condição é definido como:

$$C(K) = \lambda_{\max} / \lambda_{\min}$$

(6.2)

onde  $\lambda_{max}$  e  $\lambda_{min}$  são os valores próprios máximo e mínimo da matriz de rigidez depois do seu escalamento (Cook, 1981). Uma clara analogia pode ser estabelecida entre as figuras (6.3 a) e (6.3 b) para o caso  $K_B \gg K_A$ .

O Teorema da Correspondência (Salençon, 1977; Naylor and Pande, 1981) estabelece que os resultados obtidos por análise limite para materiais rígidos-perfeitamente plásticos podem ser generalizados para materiais elasto-perfeitamente plásticos e ainda para materiais que apresentam endurecimento cujo estado último se torna independente das deformações plásticas. Assim, os resultados previstos através do uso dos teoremas de equilíbrio limite para um material rígido-perfeitamente plástico são válidos para o caso em estudo cujo material é caracterizado por um modelo elásto-plástico, desde que se considere a mesma geometria do problema, as mesmas condições de contorno e a mesma caracterização da superfície de ruptura.

### 6.3 RESULTADOS NUMÉRICOS OBTIDOS

A envoltória de resistência do modelo de Lade é definida no espaço das tensões principais por um cone cuja curvatura é caracterizada pelo parâmetro  $m$  da equação (3.24). O ângulo de atrito  $\phi$  da envoltória de Mohr-Coulomb representa então a retificação deste cone indicado na figura (3.5 a). O ângulo de atrito obtido para o material utilizado no estudo é  $\phi = 31^\circ$ .

O talude de escavação a ser estudado (figura 6.2)

definiu-se com a inclinação  $i = 58^\circ$  e portanto, segundo a previsão teórica de equilíbrio limite, definir-se-á uma cunha de ruptura que ficará estabelecida pelo ângulo de atrito do material. A figura (6.4) mostra a definição da cunha de ruptura obtida com a utilização do modelo de Lade na análise por elementos finitos. Uma evidente concordância pode ser observada entre o resultado numérico e a solução teórica deste problema de ruptura. A previsão feita por equilíbrio limite refere-se somente à análise da ruptura do talude da escavação (trajetória de tensões de descarregamento lateral). O resultado numérico analisa também o comportamento dos pontos submetidos a uma trajetória de tensões de descarregamento vertical que provocaria, eventualmente, a ruptura por levantamento de fundo na escavação. Este tipo de ruptura não acontece no presente exemplo.

O mesmo ângulo de repouso deveria ser atingido após a ruptura do talude desta escavação qualquer que fosse a inclinação inicial do mesmo. Em particular, para um talude cuja inclinação inicial fosse aproximadamente igual ao ângulo de atrito do material, o mecanismo de ruptura não deveria se desencadear. De fato, para a malha de elementos finitos indicada na figura (6.5), com um talude inicial de  $30^\circ$  de inclinação, não houve formação de mecanismo de ruptura do talude na análise por elementos finitos desenvolvida através da utilização o modelo de Lade.

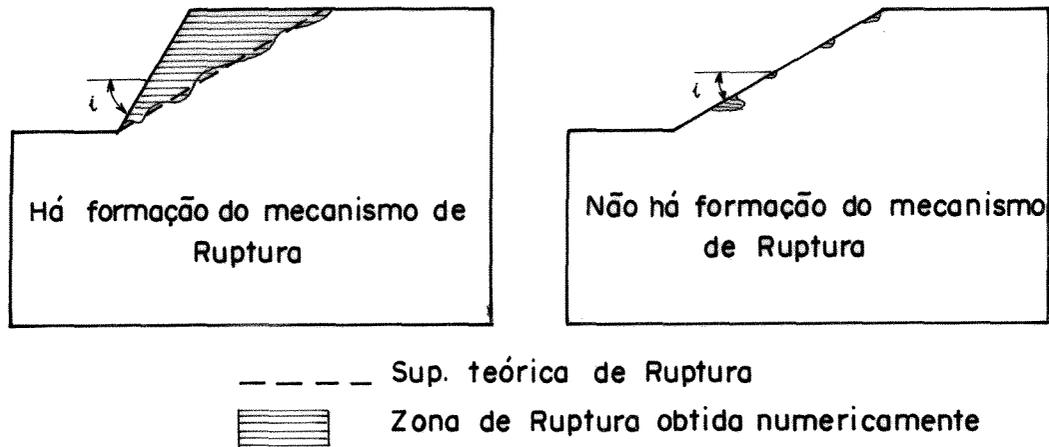


Fig. 6.4 - Superfície de ruptura definida com o modelo de Lade para  $i = 58^\circ$

Fig. 6.5 - Mecanismo de ruptura não desenvolvido para  $i \approx \phi = 31^\circ$

Com base nos conceitos de equilíbrio limite, mas estabelecendo uma série de hipóteses simplificadoras, Taylor (1948) caracterizou a estabilidade de um talude em função do valor do ângulo de atrito  $\phi$  do material e do valor do número de estabilidade  $N$ , sendo este último definido como:

$$N = \frac{c}{\gamma H} \quad (6.3)$$

onde  $c$  é a coesão do solo,  $\gamma$  o seu peso específico e  $H$  a altura do talude. Em particular, para um solo sem coesão, o valor do número de estabilidade é identicamente nulo, independente do valor do peso específico do material. Portanto, uma análise por elementos finitos desenvolvida com os parâmetros do material do exemplo inicial, mas modificando o valor do peso específico do solo, deverá definir a mesma superfície de ruptura. A figura (6.6) mostra os resultados obtidos com um peso específico igual ao 72% do seu valor inicial. A não-dependência do valor do peso

específico na definição da superfície de ruptura do talude da escavação pode ser visualizada. Obviamente, as tensões e deslocamentos obtidos foram diferentes em cada caso.

A mesma escavação (figura 6.2) foi analisada utilizando o modelo hiperbólico de Duncan e Chang (1970), implementado no programa de elementos finitos *EXCAVA* (Azevedo, 1983). Os resultados obtidos considerando a envoltória de resistência de Mohr-Coulomb sem coesão caracterizaram a região de ruptura indicada na figura (6.7). Observa-se que a utilização deste modelo não-linear elástico não estabelece uma boa concordância entre a zona de ruptura obtida numericamente e a superfície teórica de ruptura definida pelo ângulo de repouso do material.

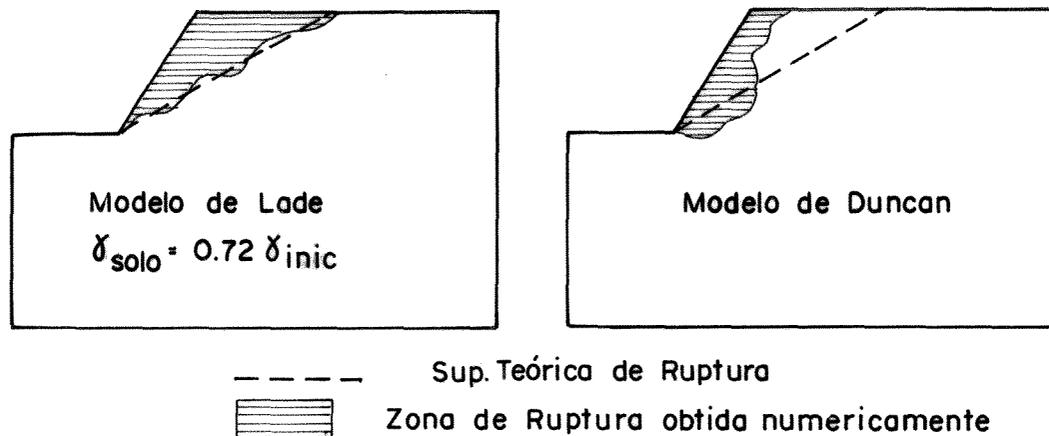


Fig. 6.6 -Superfície de ruptura definida com o modelo de Lade para  $\gamma_{\text{solo}}=0.72\gamma_{\text{inic}}$

Fig. 6.7 -Superfície de ruptura definida com o modelo hiperbólico de Duncan

Os resultados obtidos com a utilização dos modelos de Lade e de Duncan apresentaram valores convergentes ao se refinar a

discretização da malha de elementos finitos utilizada. Também foi obtida uma boa convergência dos resultados ao aumentar o número de incrementos utilizados na resolução do sistema de equações não-lineares. Como já foi dito, nos elementos da região definida pelo mecanismo de ruptura foram atribuídos valores arbitrariamente pequenos de rigidez com o objetivo único de evitar a singularidade do sistema. Sendo assim, os valores das tensões e deslocamentos nos pontos da massa rompida não têm significado e, portanto, não foram considerados na análise de convergência. Os deslocamentos dos pontos da massa de solo fora da região de ruptura se mantiveram constantes após a generalização da ruptura do talude, enquanto que os deslocamentos na massa rompida cresciam significativamente, tendendo à caracterização de um movimento de corpo rígido.

#### 6.4 ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS

A definição em cada ponto da malha do valor do nível de tensões  $f_p$  (equação 3.24) que caracteriza a última superfície de plastificação ativada depois do processo de escavação, permite estabelecer algumas considerações. Se o estado inicial de tensões se encontra definido pelo coeficiente de empuxo em repouso, a situação inicial da massa de solo antes da escavação é caracterizada pela linha denominada  $K_0$ . Conhecidos então os valores iniciais do nível de tensões  $f_p$  e, dependendo dos valores alcançados por este ao final da execução da escavação, podem ser definidas três regiões para caracterizar as diferentes trajetórias de tensões envolvidas no processo de

escavação (figura 6.8 a):

- Região (1): Pontos que seguiram uma trajetória de tensões correspondente aproximadamente a um descarregamento proporcional na direção da linha  $K_0$ .
- Região (2): Pontos que seguiram aproximadamente a trajetória de tensões característica do ensaio de descarregamento lateral (RTC).
- Região (3): Pontos que seguiram aproximadamente a trajetória de tensões característica do ensaio de descarregamento axial (RTE).

A figura (6.8 b) apresenta a localização, na escavação em estudo, das três regiões caracterizadas por trajetórias de tensões típicas deste processo. Ficam assim determinados os pontos nos quais ocorre um descarregamento lateral, sendo que parte da massa de solo caracterizada por esta trajetória de tensões atinge o estado de ruptura. A região na qual ocorre um descarregamento vertical fica também definida. A eventual ruptura por levantamento de fundo, que corresponderia a esta última trajetória de tensões, não foi atingida neste estudo. As trajetórias de tensões anteriormente caracterizadas e a correspondente regionalização obtida para as mesmas são concordantes com as propostas por Medeiros and Eisenstein (1983) e Eisenstein and Medeiros (1983) para uma análise de escavações escoradas baseada na utilização de parâmetros não-lineares elásticos dependentes das trajetórias de tensões desenvolvidas na massa do solo.

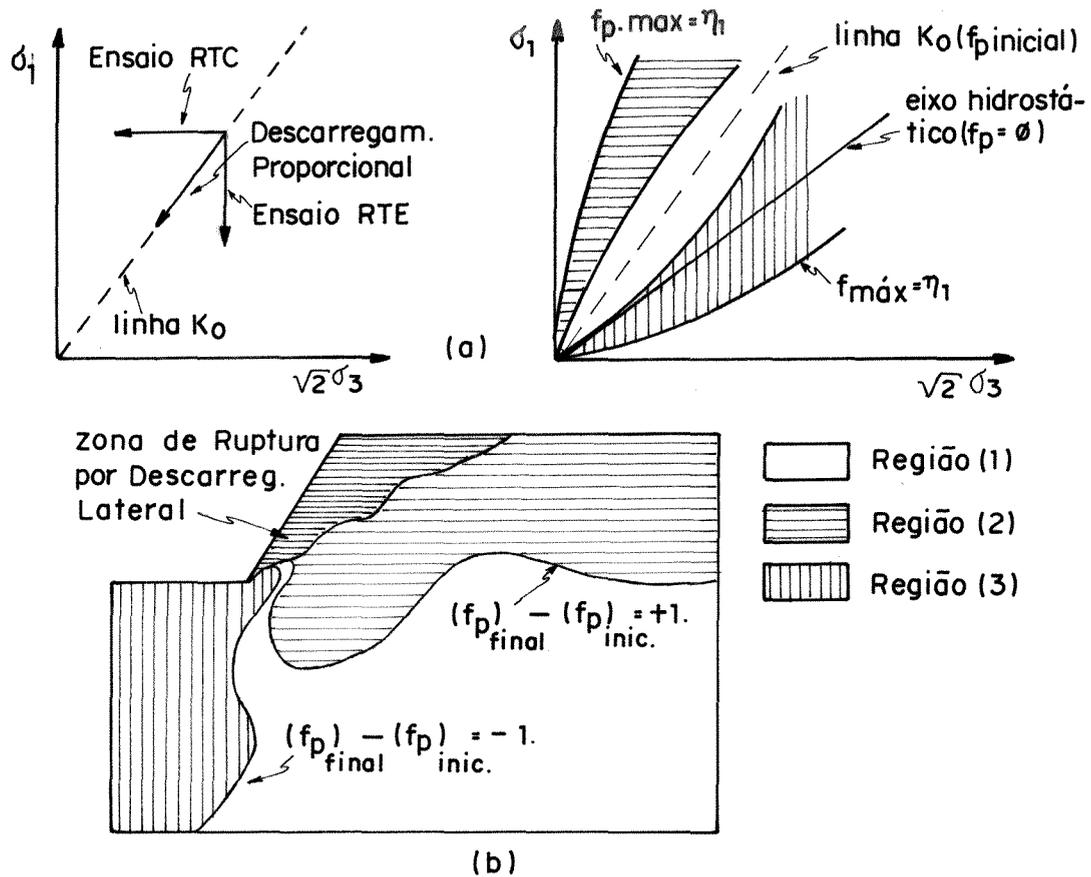


Fig. 6.8 - a) Regionalização no plano triaxial das trajetórias de tensões  
 b) Localização na escavação das trajetórias de tensões envolvidas

A figura (6.9) apresenta as curvas que estabelecem os pontos que possuem o mesmo valor do nível de tensões  $f_p$  depois do processo de escavação. No material em estudo, o valor do parâmetro  $\eta_1$  que caracteriza a ruptura no modelo de Lade é  $\eta_1 = f_{p.\text{max}} = 19.4$ . O valor do nível de tensões  $f_p$  em cada ponto pode ser interpretado como uma avaliação do fator de segurança à ruptura na escavação. Mais explicitamente, definindo:

$$FS' = \eta_1 / f_{p.\text{final}} \quad (6.4)$$

os pontos que possuem o mesmo valor  $FS'$  (figura 6.10) apresentam a mesma potencialidade de ruptura se é considerada a envoltória de resistência definida no modelo de Lade.

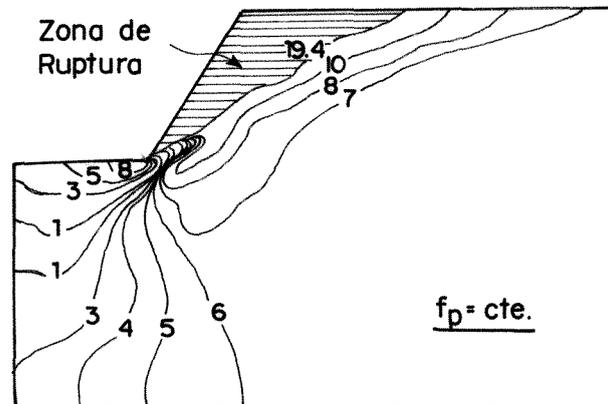


Fig. 6.9 - Pontos caracterizados por um mesmo valor do nível de tensões  $f_p$

Azevedo e Ko (1986 a) desenvolveram a análise de uma escavação não-escorada, executada numa centrífuga, cujas características eram iguais às do problema desenvolvido neste trabalho. A ruptura do talude da escavação experimental não era sempre atingida, sendo que a mesma era dependente do valor da aceleração centrífuga utilizada, porém, o mecanismo de ruptura foi sempre definido na análise numérica. O modelo de Lade (1977) utilizado na representação do material caracterizava um solo sem coesão e, segundo foi analisado neste trabalho, para este tipo de material a superfície de ruptura obtida independe do valor do peso específico do solo, parâmetro cujo valor era função da magnitude da a aceleração centrífuga adotada.

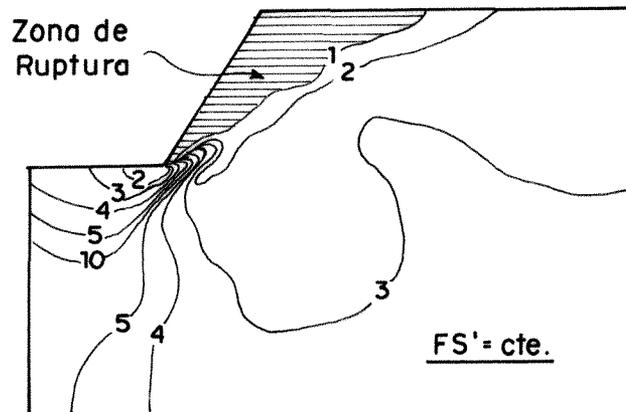


Fig. 6.10 - Pontos caracterizados por um mesmo valor de  $FS'$

O estudo aqui efetuado do desenvolvimento da superfície de ruptura daquele problema, considerando os parâmetros do material então utilizados, indica que os resultados numéricos obtidos com a utilização do modelo elasto-plástico representam exatamente a cunha de ruptura teórica de uma areia sem coesão. No entanto, o material utilizado na modelagem centrífuga tratava-se de areia úmida com um valor apreciável de coesão aparente. Conclui-se que a não possibilidade de representação numérica da estabilidade observada neste talude executado na centrífuga numa areia úmida, era consequência de não ter sido atendida a existência de coesão efetiva na formulação de ruptura utilizada (Lade, 1977). A estabilidade observada experimentalmente poderia ser simulada numericamente desde que o modelo considerasse algum parâmetro para representação da coesão efetiva do material, tal como o utilizado em formulações posteriores (Kim and Lade, 1984, 1988).

## CAPÍTULO 7

### ANÁLISE DE UMA ESCAVAÇÃO ESTRONCADA DO METROPOLITANO DA CIDADE DE SÃO PAULO

#### 7.1 CARACTERÍSTICAS DO PROBLEMA

##### 7.1.1 Considerações Iniciais

Neste capítulo será apresentada a análise de uma obra de escavação executada para permitir a construção de novas linhas do Metropolitano da cidade de São Paulo. Esta escavação, localizada entre a Rua da Consolação e a Avenida Paulista, faz parte de um amplo programa de expansão da rede metroviária que vem sendo desenvolvido pela Companhia do Metropolitano de São Paulo. Na figura (7.1) estão indicadas as linhas em operação, a rede em construção e as novas vias em fase de projeto da rede Metropolitana de Transporte Coletivo.

COMPANHIA DO METROPOLITANO DE SÃO PAULO - METRÔ  
**REDE METROPOLITANA DE TRANSPORTE COLETIVO**  
 PUBLIC TRANSPORTATION METROPOLITAN NETWORK  
**METRÔ**

-  LINHA NORTE-SUL EM OPERAÇÃO  
NORTH-SOUTH LINE (IN OPERATION)
-  EXTENSÃO NORTE EM IMPLANTAÇÃO  
NORTH EXTENSION (UNDER CONSTRUCTION)
-  LINHA LESTE-OESTE EM OPERAÇÃO  
EASTWEST LINE (IN OPERATION)
-  LINHA LESTE-OESTE PRÉ OPERACIONAL  
EASTWEST LINE (PRE OPERATIONAL)
-  EXTENSÃO LESTE EM IMPLANTAÇÃO  
EAST EXTENSION (UNDER CONSTRUCTION)
-  LINHA VILA PRUDENTE-VILA MADALENA EM IMPLANTAÇÃO  
VILA PRUDENTE-VILA MADALENA LINE (UNDER CONSTRUCTION)
-  LINHA VILA PRUDENTE-VILA MADALENA EM PROJETO  
VILA PRUDENTE-VILA MADALENA LINE (PLANNED)
-  LINHA SUDESTE-SUDOESTE EM PROJETO  
SOUTHEAST-SOUTHWEST LINE (PLANNED)

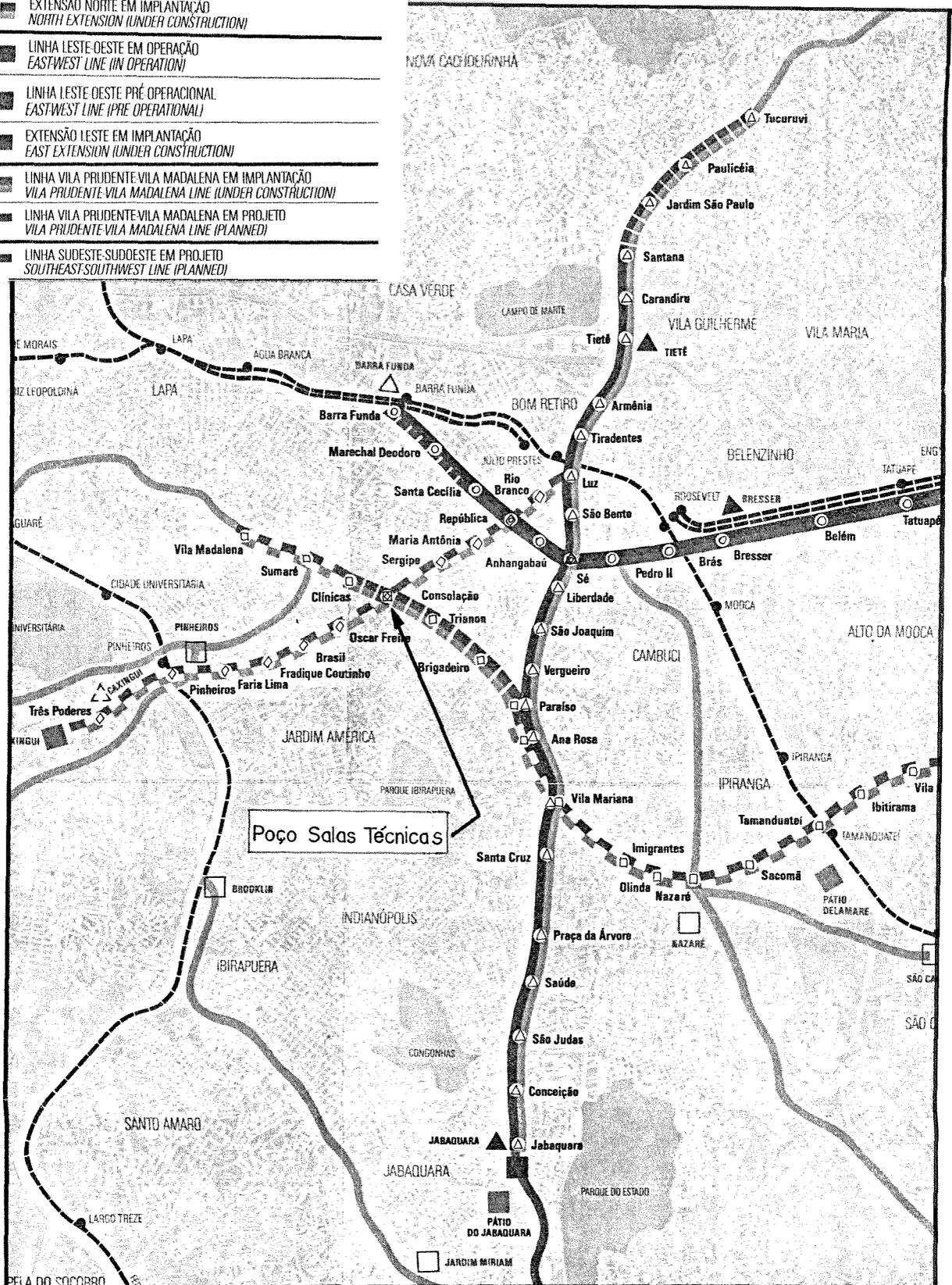


Fig. 7.1 - Linhas do Metropolitano da cidade de São Paulo

A escavação a ser analisada, denominada Poço Salas Técnicas, forma parte do conjunto de obras atualmente em desenvolvimento para a implantação da linha Vila Prudente-Vila Madalena que atravessará a Avenida Paulista em toda a sua extensão. O desenvolvimento da linha será efetuado através de escavações subterrâneas a serem executadas utilizando o Sistema Austríaco, em alguns trechos, e através da utilização de Shields em outros. A obra em estudo consiste numa grande escavação de mais de 31.0 m de profundidade localizada no cruzamento da já mencionada linha Paulista e da futura linha Sudeste-Sudoeste (figura 7.2). Esta escavação permitirá a construção de uma estrutura subterrânea que abrigará as salas

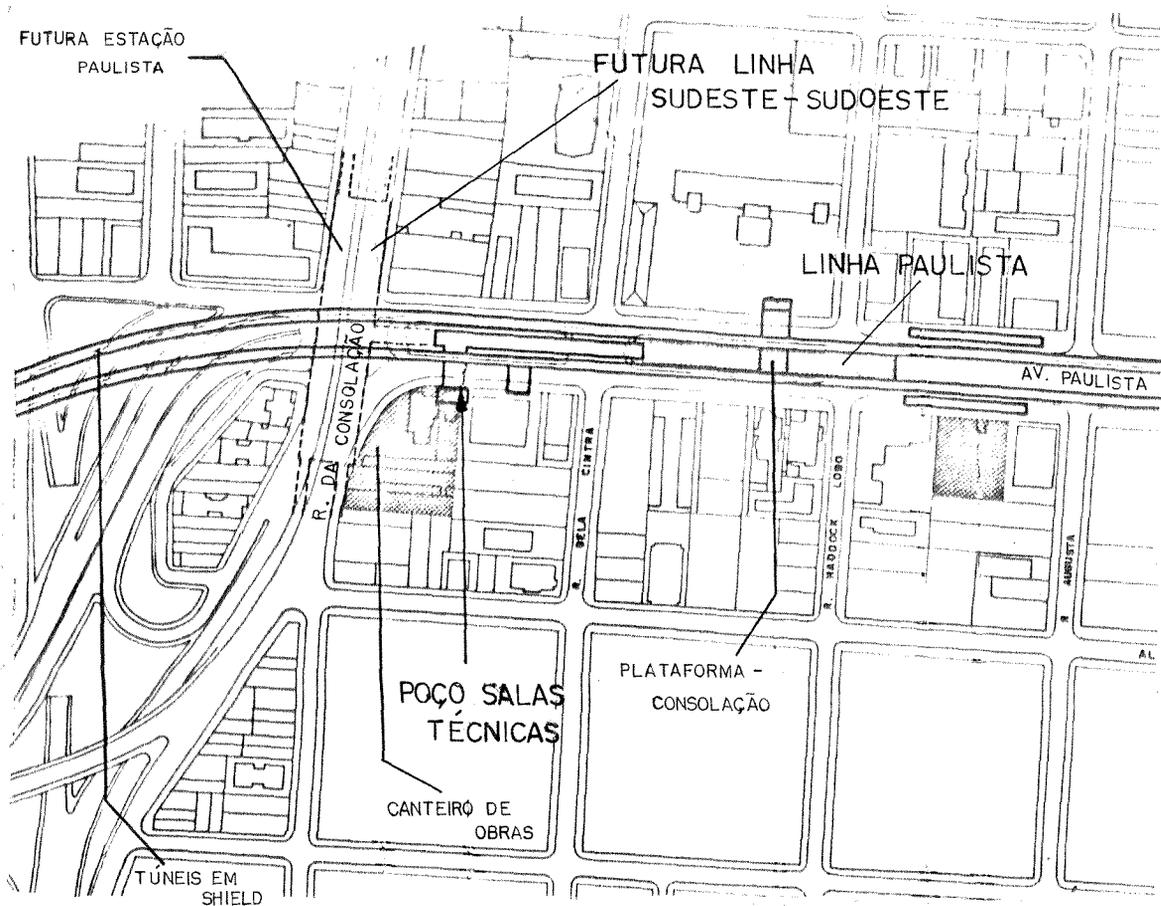


Fig. 7.2 - Localização da obra em estudo

técnicas das estações Consolação e Paulista, sendo também utilizada para retirada dos Shields da linha Sudeste-Sudoeste.

Algumas das facilidades implementadas no programa *ANLOG* serão utilizadas na previsão das tensões e deslocamentos através de uma análise sequencial por elementos finitos. Esta análise envolve os processos anteriores à escavação que contribuíram para definir o estado inicial de tensões na massa de solo e as diferentes fases do processo construtivo correspondentes à execução da obra propriamente dita.

#### **7.1.2 Características do Perfil Geotécnico**

A cidade de São Paulo se encontra localizada numa bacia sedimentar terciária cujo processo de formação decorreu da ação simultânea de sedimentação e tectonismo. Os sedimentos desta bacia sofreram um processo de alteração que é responsável pela coloração e o pré-adensamento observado no material.

O perfil da região mostra um pacote inferior, constituído pelas denominadas Areias Basais e um pacote superior, basicamente argiloso, que constitui o objeto de estudo nos projetos de escavação executados na cidade. O pacote argiloso do perfil geológico desta bacia sedimentar é constituído, por sua vez, por três camadas diferentes. A camada inferior, caracterizada como Argila Cinza Esverdeada, não interferirá no comportamento da escavação a ser analisada neste capítulo. O estrato intermediário está constituído pelo Solo Variegado,

camada composta por argilas siltosas com níveis arenosos. As Argilas Porosas Vermelhas constituem a camada superior, podendo se distinguir nela um horizonte inferior, mais rijo e um horizonte superior bastante compressível. A figura (7.3) mostra a planta do Poço Salas Técnicas junto com o corte longitudinal correspondente ao perfil geotécnico da obra a ser analisada neste trabalho.

O estudo das características geotécnicas das camadas superiores que constituem esta bacia tornou-se necessário como consequência da execução de obras que envolviam escavações (Sousa Pinto e Massad, 1972; Massad, 1974; Küpper, Costa Filho e Antunes, 1985; Massad, Samara e Barros, 1985).

A Companhia do Metropolitano da Cidade de São Paulo executou em 1987 um poço de prospecção de 2.0 m de diâmetro e 13.5 m de profundidade na Avenida Paulista com o objetivo de retirar blocos indeformados. Foram retirados dois blocos de 45 cm de lado nos níveis de profundidade correspondentes a 3.30, 6.30, 9.30 e 12.30 metros respectivamente.

Um extenso programa de ensaios de laboratório (Parreira, 1989) vem sendo desenvolvido com este material no Laboratório de Mecânica de Solos da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro visando caracterizar o comportamento tensão-deformação-resistência do solo. Alguns destes resultados experimentais foram utilizados neste trabalho durante o processo de calibração do modelo de Lade a ser apresentado nas seções 7.2 e 7.3.

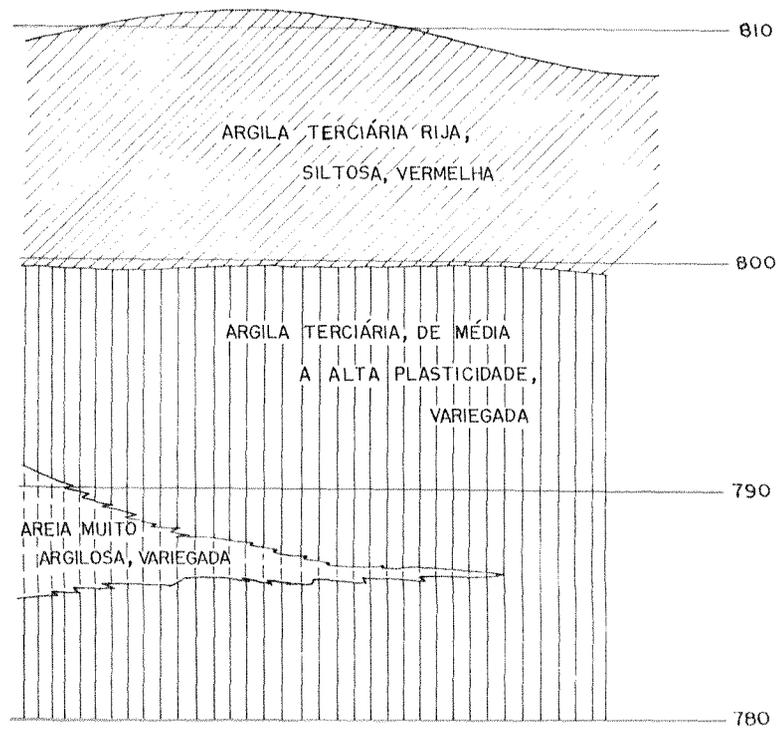
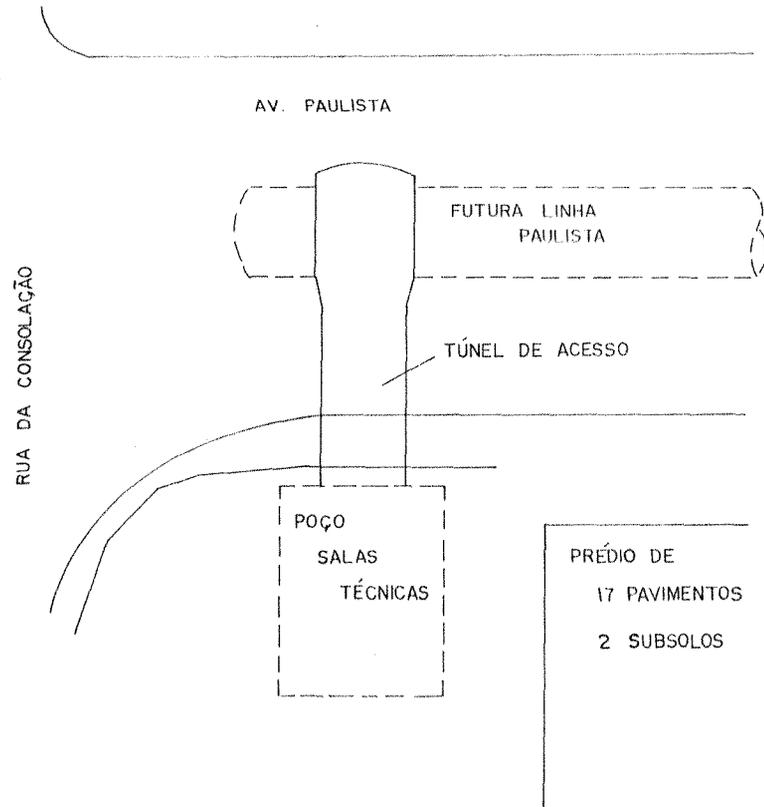


Fig. 7.3 - Planta e perfil geotécnico do Poço Salas Técnicas

### 7.1.3 Características do Poço Salas Técnicas

Na figura (7.3) foi mostrada a planta da escavação adjacente à qual, na altura 2433 da Avenida Paulista, se encontra edificado um prédio de 17 pavimentos e 2 subsolos que necessitou uma atenção especial em relação aos possíveis recalques que viessem a acontecer como consequência da obra. A escavação dos dois subsolos e a posterior fundação por meio de tubulões da mencionada edificação devem ser também considerados para definir corretamente o estado de tensões existente na massa de solo no início de execução da obra em estudo.

A estrutura de suporte projetada consiste numa cortina de estacas metálicas verticais com um espaçamento horizontal de 2.225 m e uma ficha de 0.50 m. Para evitar problemas decorrentes das vibrações originadas com um processo de cravação de estacas, os perfis metálicos foram instalados num pré-furo preenchido com concreto e solo-cimento.

O nível de água foi rebaixado posteriormente desde a sua localização inicial, aproximadamente na interface entre a Argila Vermelha e o Solo Variiegado, até uns 4.0 m abaixo do nível de fundo da futura escavação.

A estrutura de suporte foi complementada com 3 níveis de estroncas não pré-esforçadas. Para a instalação de cada nível de escoramento, a escavação foi executada até 1.0 m abaixo do respectivo nível. Sobre os perfis metálicos e horizontalmente

correm vigas de distribuição. Por sua vez, tábuas de madeira eram inseridas atrás das abas frontais do conjunto de perfis H à medida que prosseguia a escavação.

A figura (7.4) mostra uma planta da escavação indicando a localização das estacas e o nível de escoramento correspondente à cota 804.0 m. O corte vertical A - A está representado na figura (7.5). O processo de escavação foi executado em fases sucessivas até os níveis 811.0 m, 803.0 m, e 795.0 m respectivamente. Procedeu-se, após alcançada cada uma das cotas mencionadas, à instalação dos níveis 812.0 m, 804.0 m e 796.0 m de escoramento.

As etapas posteriores do processo consistiram na concretagem do lastro de fundo e na escavação do túnel de acesso à futura linha de transporte coletivo, sendo para isso necessário cortar previamente as estacas que interferiam na execução do túnel.

## **7.2 MODELAGEM DA ARGILA VERMELHA**

### **7.2.1 Características Geotécnicas do Material**

As Argilas Vermelhas constituem um solo poroso cujo índice de vazios é tipicamente maior do que 1.0, com teor de umidade baixo e grau de saturação menor que 100.0 %.



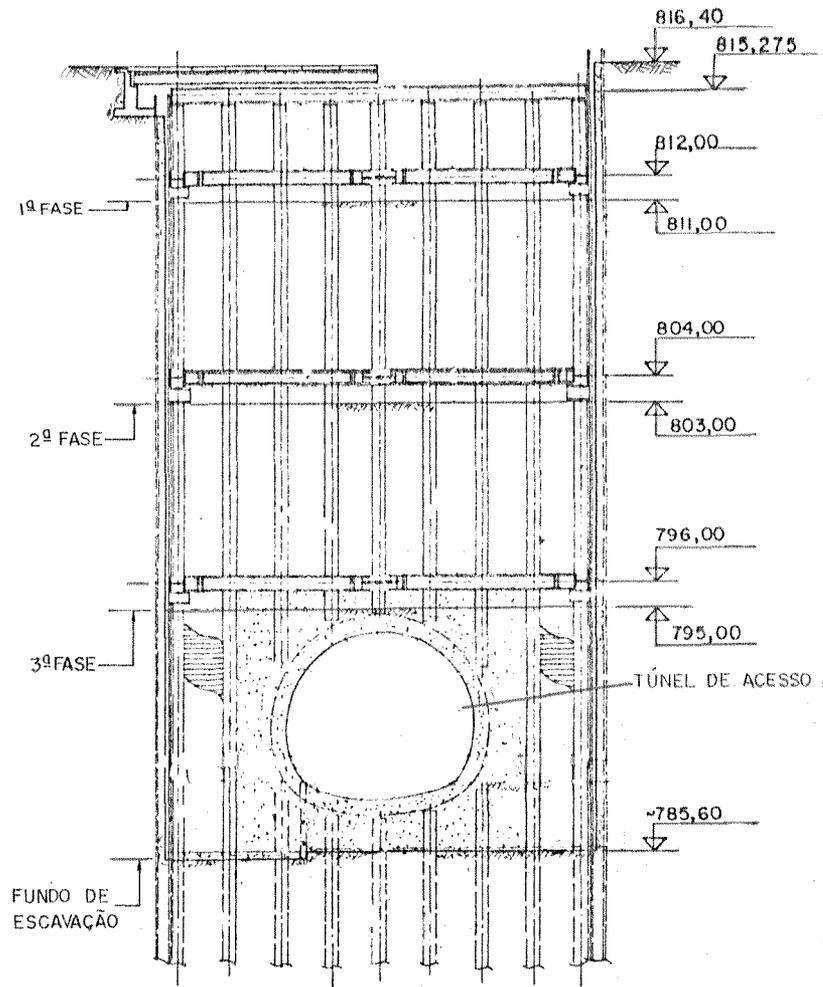


Fig. 7.5 - Corte vertical da obra

Este material originou-se da evolução pedológica de uma argila terciária, depositada em águas profundas devido a alterações no clima regional. Esta camada, de espessura variando entre 4.0 e 25.0 m, está constituída por um horizonte superior mais intensamente intemperizado. A passagem do horizonte superior para o inferior é gradual, mas em função da existência destes dois materiais, a camada é geralmente dividida em "Argila Vermelha Porosa" e "Argila Vermelha Rija". Este material, caracterizado por uma elevada porosidade, constitui tipicamente um solo laterítico.

O valor da pressão de sobre-adensamento do material não permite determinar a carga máxima à que o solo esteve submetido na sua história geológica como consequência da alta intemperização a que foi submetido o material. A pressão de sobre-adensamento pode variar dependendo da profundidade da região considerada.

Os dois horizontes presentes na camada de Argila Vermelha apresentam a mesma envoltória de resistência, o que indica tratar-se de uma camada única. O comportamento mecânico foi fortemente influenciado pelo processo de laterização que teria provocado uma cimentação errática das partículas do solo, somente destruída quando as pressões aplicadas são elevadas (Massad, 1978).

## **7.2.2 Obtenção dos Parâmetros do Material**

### **7.2.2.1 Considerações Iniciais**

A seguir, será apresentado em forma detalhada o processo desenvolvido para a obtenção dos parâmetros do modelo de Lade (1979) correspondentes à Argila Vermelha da bacia sedimentar de São Paulo. Os conceitos teóricos desta formulação elasto-plástica foram apresentados na seção 3.3.

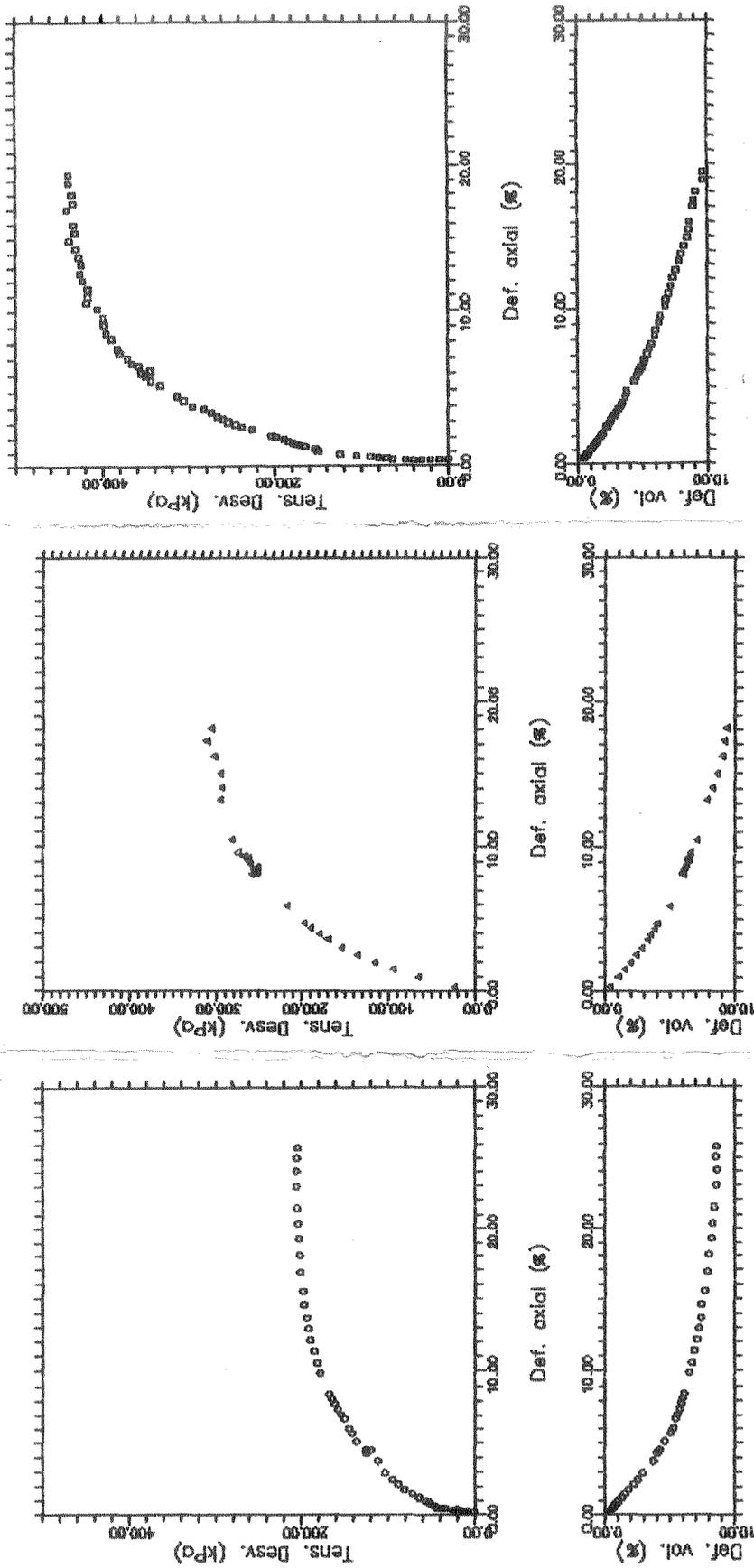
Na calibração efetuada consideraram-se os resultados de laboratório obtidos por Parreira (1989) no horizonte deste

material que recebe geralmente a denominação de "Argila Vermelha Rija". O material apresenta um pequeno valor de sobre-adensamento, provavelmente devido ao processo de laterização, porém, aos efeitos da calibração a argila apresentou o comportamento de um material normalmente adensado.

Os ensaios executados foram desenvolvidos com amostras parcialmente saturadas (grau de saturação correspondente à umidade natural) obtidas a uma profundidade de 6.3 m do poço de prospecção executado na Av. Paulista. Foi considerado que o valor das tensões totais obtidas no ensaio correspondiam ao valor das tensões efetivas.

Para a calibração do material foram escolhidos 3 ensaios CTC correspondentes aos valores de tensão confinante de 0.5 kg/cm<sup>2</sup>, 1.0 kg/cm<sup>2</sup> e 2.0 kg/cm<sup>2</sup>. As figuras (7.6 a), (7.6 b) e (7.6 c) mostram os valores experimentais dos ensaios CTC utilizados na obtenção dos parâmetros. A figura (7.7) mostra o resultado do ensaio de compressão hidrostática necessário para a determinação dos parâmetros colapsíveis do modelo. Foram utilizados os valores experimentais do ensaio considerado mais representativo sendo, eventualmente, eliminados alguns pontos ou considerado o valor médio resultante dos diferentes ensaios efetuados para um mesmo nível de tensão confinante.

Para facilitar o cálculo dos parâmetros correspondentes ao modelo de Lade (1979) foram desenvolvidos os programas LADCOL e LADEXP, baseados no programa LADCAL (Azevedo, 1983). Estes



a)  $\sigma_v = 0.5 \text{ kg/cm}^2$       b)  $\sigma_v = 1.0 \text{ kg/cm}^2$       c)  $\sigma_v = 2.0 \text{ kg/cm}^2$

Fig. 7.6 - Ensaio CTC Utilizados na Calibração da Argila Vermelha

programas calculam, respectivamente, os parâmetros plásticos colapsíveis e plásticos expansivos do material. Durante o processo de calibração são gerados arquivos intermediários para o traçado de gráficos que permitem a visualização das correlações obtidas. Com este procedimento, consegue-se um melhor refinamento na obtenção dos parâmetros, possibilitando a eliminação de possíveis inconsistências nos valores experimentais utilizados.

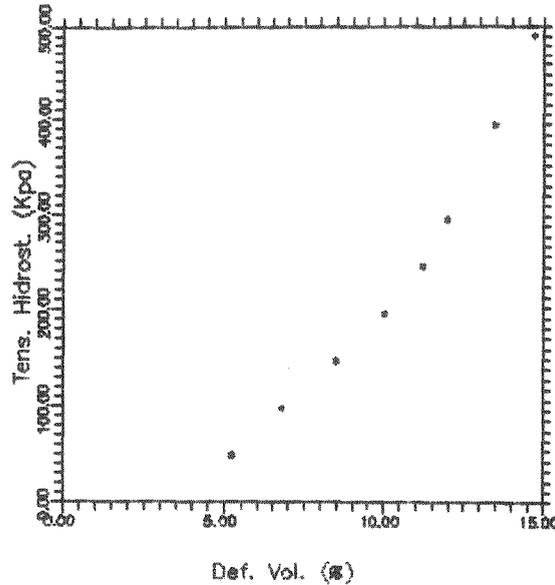


Fig. 7.7 - Ensaio HC utilizado na calibração da Argila Vermelha

#### 7.2.2.2 Parâmetros Elásticos

São três os parâmetros necessários para a determinação das deformações elásticas:  $K_{ur}$ ,  $n$  e  $\nu$ . O valor do coeficiente de Poisson  $\nu$ , é considerado constante enquanto que os valores  $K_{ur}$  e  $n$  são obtidos a partir da expressão (3.16). Esta equação, pode ser indicada como:

$$\log \left( \frac{E_{ur}}{\rho \alpha} \right) = \log \left( K_{ur} \right) + n \log \left( \frac{\sigma_3}{\rho \alpha} \right) \quad (7.1)$$

sendo representada, desta forma, por uma reta num gráfico logarítmico. Segundo a metodologia proposta por Lade (1979), os valores  $E_{ur}$  não são definidos, no caso de argilas, a partir da curva de descarregamento do material, sendo obtidos considerando a inclinação inicial das curvas de carregamento primário dos ensaios CTC.

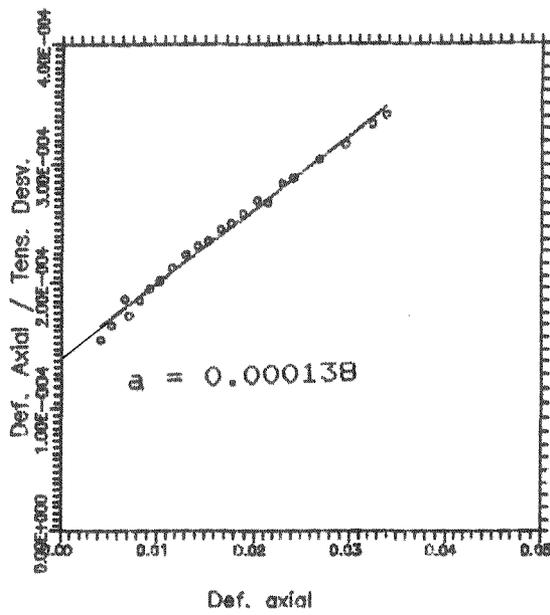
Para uma melhor definição dos valores  $E_{ur}$  obtidos experimentalmente dos ensaios CTC optou-se por representar na curva transformada utilizada por Duncan e Chang (1970) os pontos iniciais dos ensaios CTC utilizados nesta calibração. Portanto, a representação gráfica dos pontos foi efetuada considerando a expressão:

$$\frac{\varepsilon}{(\sigma_1 - \sigma_3)} = a + b \varepsilon \quad (7.2)$$

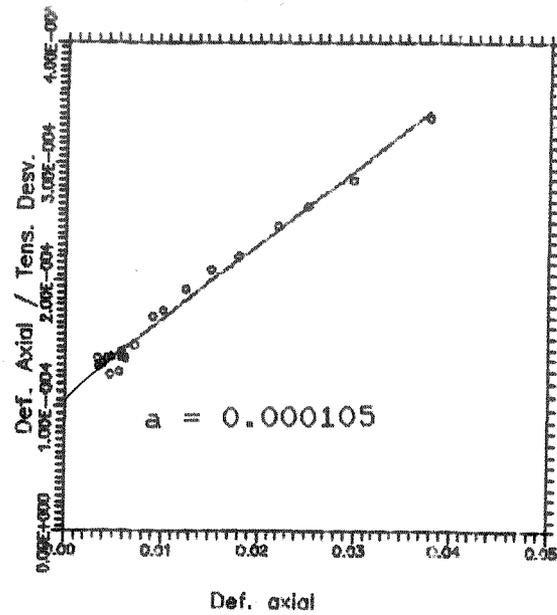
Desta forma, os parâmetros  $a$  e  $b$  são facilmente obtidos considerando a reta que melhor aproxima o conjunto de dados experimentais. Nesta representação hiperbólica, o valor do módulo  $E_{ur}$  utilizado para definir os parâmetros elásticos com a expressão (7.1) será:

$$E_{ur} = \frac{1}{a} \quad (7.3)$$

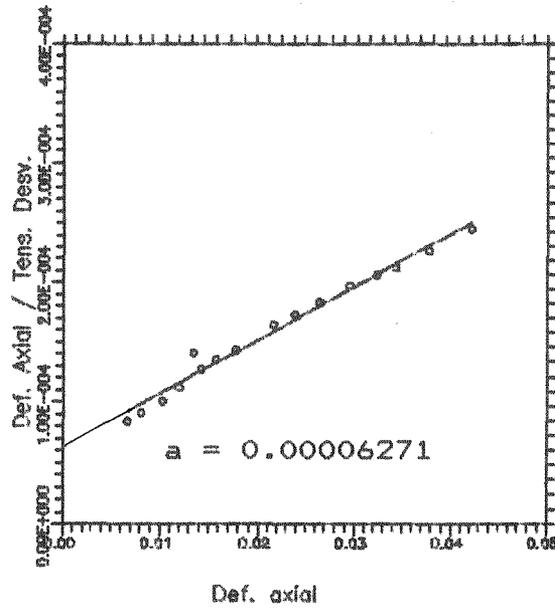
As figuras (7.8 a), (7.8 b) e (7.8 c) apresentam as curvas transformadas dos ensaios considerados na obtenção dos



a)  $\sigma_3 = 0.25 \text{ kg/cm}^2$



b)  $\sigma_3 = 0.5 \text{ kg/cm}^2$



c)  $\sigma_3 = 1.0 \text{ kg/cm}^2$

Fig. 7.8 - Curvas transformadas para obtenção do módulo de elasticidade

parâmetros elásticos do material. Os módulos obtidos com este procedimento, foram representados posteriormente no gráfico logarítmico indicado na figura (7.9). A interseção da reta que melhor aproxima os pontos experimentais com a vertical  $\sigma_3/p_a = 1$  define o valor do parâmetro  $K_{ur}$ . A inclinação desta reta corresponde ao valor de  $n$ .

O coeficiente de Poisson  $\nu$  foi considerado constante. O seu valor foi definido de acordo com a relação indicada na figura (3.8) que vincula o Índice de Plasticidade com o parâmetro  $\nu$ . Para o Índice de Plasticidade considerado ( $I.P. = 25.7$ ), o coeficiente de Poisson resultante foi  $\nu = 0.25$ .

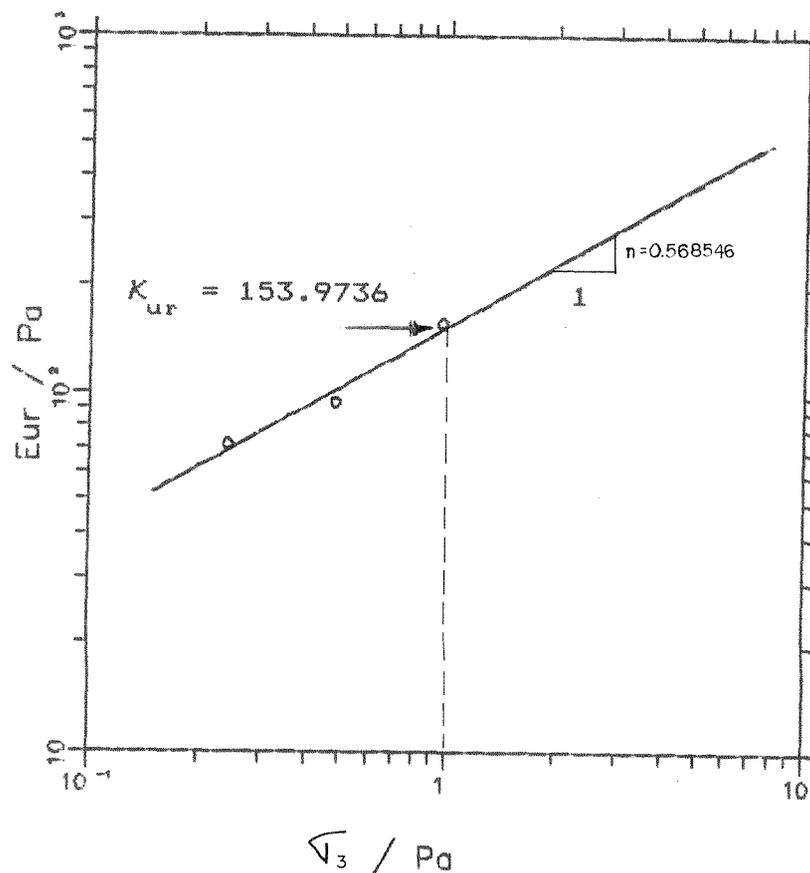


Fig. 7.9 - Obtenção dos parâmetros elásticos da Argila Vermelha

### 7.2.2.3 Parâmetro Plástico Colapsível

Para a caracterização das deformações plásticas colapsíveis, é necessária a determinação de um único parâmetro segundo foi mencionado na seção 3.4.2. Este parâmetro pode ser facilmente definido a partir dos resultados de um ensaio de compressão hidrostática.

A equação (3.39) é representada por uma reta cuja inclinação  $\rho$  corresponde ao parâmetro plástico a ser determinado. O nível de tensão colapsível, para o caso de um ensaio HC, fica definido como:

$$f_c = I_1^2 + 2 I_2 = 3 \sigma^2 \quad (7.4)$$

onde  $\sigma$  representa a tensão hidrostática no ponto considerado. Ao longo deste ensaio, as deformações plásticas expansivas são nulas e, portanto, a deformação volumétrica total poderá ser considerada como:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_v^e + \varepsilon_v^c \quad (7.5)$$

logo,

$$\varepsilon_v^c = \varepsilon_v - \varepsilon_v^e \quad (7.6)$$

Esta última expressão permite a avaliação das deformações plásticas colapsíveis,  $\varepsilon_v^c$ , uma vez que as deformações totais,  $\varepsilon_v$ , são conhecidas experimentalmente e as deformações elásticas,  $\varepsilon_v^e$ , podem ser calculadas analiticamente a partir dos parâmetros elásticos previamente definidos. As deformações volumétricas elásticas são calculadas através da equação:

$$\varepsilon_v^e = \frac{3(1-2\nu)}{(1-n)K_{ur}} \left[ \frac{\sigma}{\rho a} \right]^{(1-n)} \quad (7.7)$$

Conhecidas as deformações colapsíveis do ensaio hidrostático, o trabalho plástico correspondente será obtido como:

$$W_c = \int \sigma d\varepsilon_v^c \approx \sum \left[ \sigma \Delta\varepsilon_v^c \right] \quad (7.8)$$

A partir dos valores de  $W_c$  e  $f_c$  correspondentes a cada ponto da curva experimental, pode ser definida a correlação indicada na figura (7.10), onde a inclinação  $\rho$  da reta corresponde ao parâmetro colapsível.

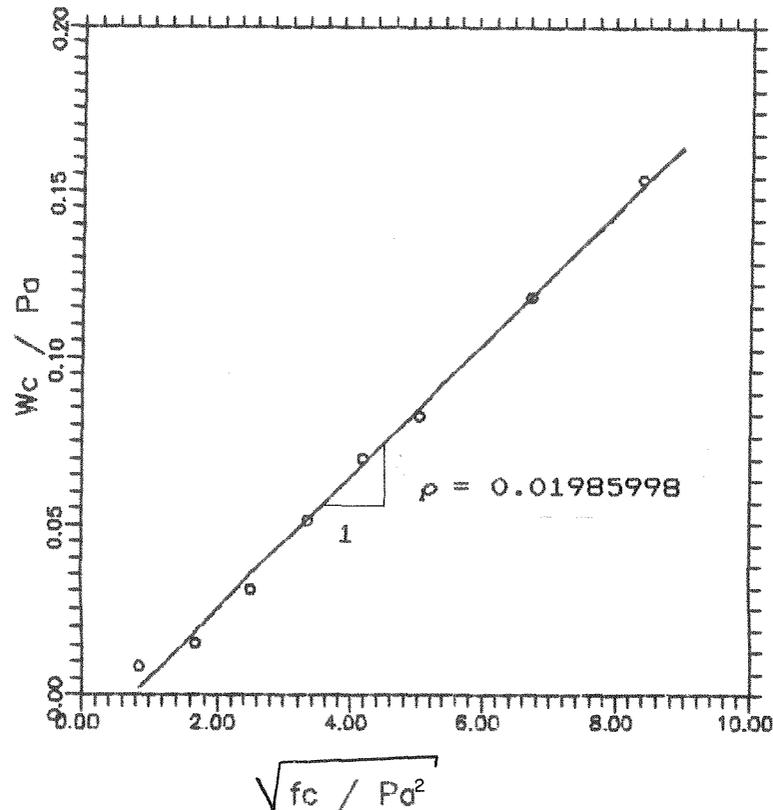


Fig. 7.10 - Obtenção do parâmetro colapsível da Argila Vermelha

#### 7.2.2.4 Parâmetros Plásticos Expansivos

Os dois parâmetros que definem a superfície de ruptura no modelo de Lade ( $m$  e  $\eta_1$ ) podem ser obtidos considerando as tensões no estado de ruptura dos ensaios triaxiais convencionais. A partir das equações (3.24) e (3.25), pode ser definida a expressão:

$$\log \left[ \eta_1 \right] = \log \left[ \frac{I_1^3}{I_3} - 27 \right] + m \log \left[ \frac{I_1}{pa} \right] \quad (7.9)$$

ou bem,

$$\log \left[ \frac{I_1^3}{I_3} - 27 \right] = \log \left[ \eta_1 \right] + m \log \left[ \frac{pa}{I_1} \right] \quad (7.10)$$

Nesta expressão, os valores dos invariantes de tensão correspondentes ao ensaio CTC, são:

$$I_1 = \sigma_1 + 2 \sigma_3 \quad (7.11)$$

$$I_3 = \sigma_1 \sigma_3^2 \quad (7.12)$$

Desta forma, conhecidos os valores das tensões correspondentes ao estado de ruptura, será possível definir a reta que melhor represente o conjunto de pontos experimentais no gráfico logarítmico indicado na figura (7.11) que mostra a correlação obtida para a Argila Vermelha. A inclinação desta reta e o valor correspondente a  $pa/I_1 = 1$  fornecem os parâmetros  $m$  e  $\eta_1$  respectivamente.

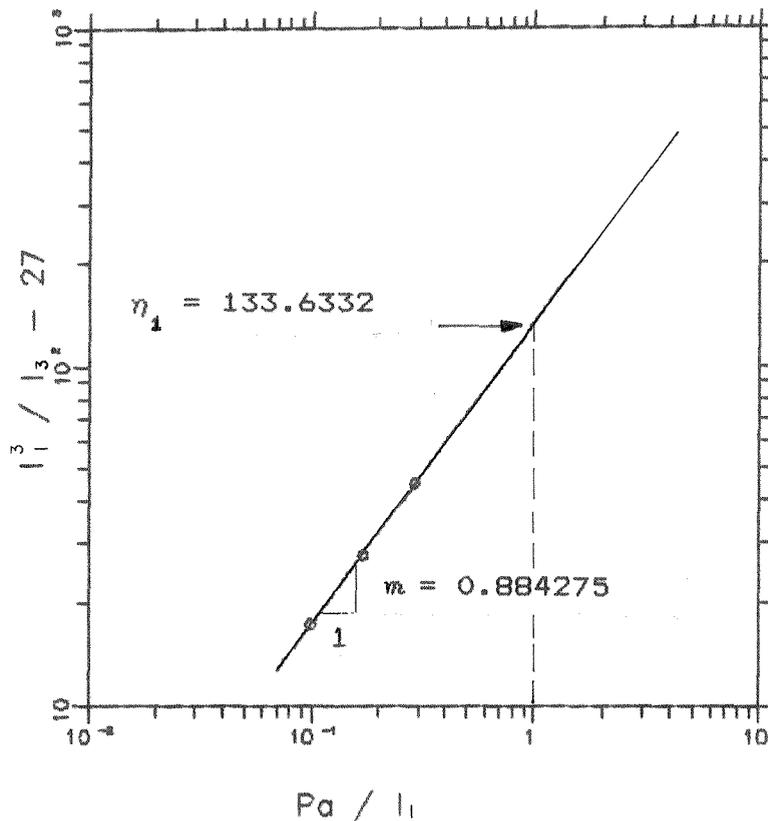


Fig. 7.11 - Obtenção dos parâmetros de ruptura da Argila Vermelha

A direção das deformações plásticas expansivas precisa da determinação dos parâmetros  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $t_1$  e  $t_2$ . Para o caso da Grundite Clay, Lade (1979) obteve as simplificações indicadas nas expressões (3.41 a / 3.41 d). Para o cálculo destes parâmetros, utiliza-se o conceito de "Coeficiente de Poisson Plástico Expansivo" (Lade, 1972), caracterizado por:

$$\nu^P = - \frac{\Delta \varepsilon_3^P}{\Delta \varepsilon_1^P} \quad (7.13)$$

onde  $\Delta \varepsilon_1^P$  e  $\Delta \varepsilon_3^P$  correspondem aos incrementos de deformação principal plástico expansivo maior e menor respectivamente. Substituindo as expressões destes incrementos de deformação de

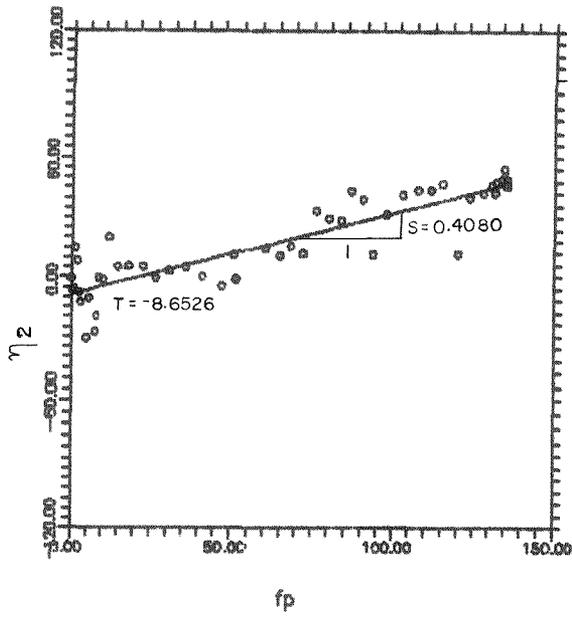
acordo com a expressão (3.32), pode ser obtida a expressão correspondente a  $\eta_2$ :

$$\eta_2 = \frac{3(1 + \nu^p) I_1^2 - 27 \sigma_3 (\sigma_1 + \nu^p \sigma_3)}{\left[ \frac{\rho \alpha}{I_1} \right]^m \left[ \sigma_3 (\sigma_1 + \nu^p \sigma_3) - \frac{I_3}{I_1} m (1 + \nu^p) \right]} \quad (7.14)$$

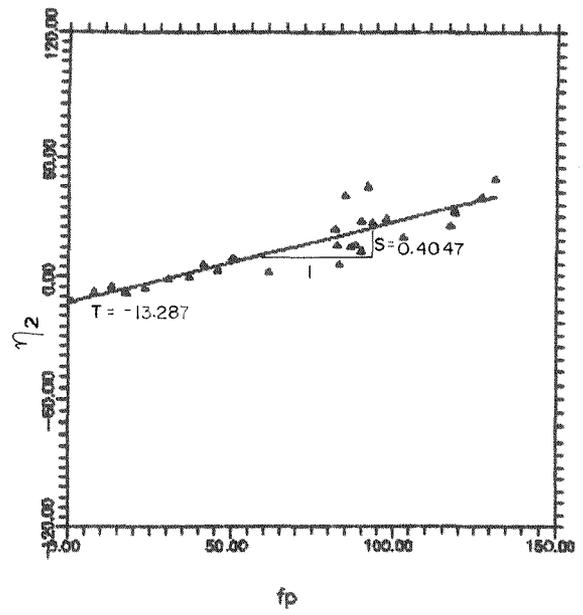
Todas as variáveis desta expressão são conhecidas para um dado nível de tensão.

As deformações plásticas expansivas são determinadas a partir dos valores das deformações totais obtidos experimentalmente, descontando as parcelas correspondentes às deformações elásticas e deformações plásticas colapsíveis, calculadas utilizando os parâmetros previamente definidos do material. Conhecidas as deformações plásticas expansivas, as expressões (7.13) e (7.14) permitem a determinação do valor de  $\eta_2$  para cada nível de tensão expansivo,  $f_p$ . A representação destes valores permite determinar os valores dos parâmetros  $S$  e  $T$  para cada ensaio CTC utilizado na calibração. As figuras (7.12 a), (7.12 b) e (7.12 c) mostram as correlações obtidas.

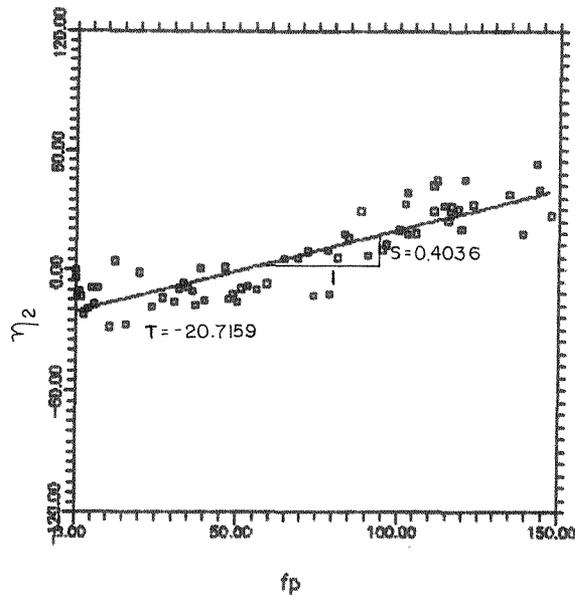
Observa-se que os valores obtidos para a inclinação  $S$  são muito próximos para os diferentes valores de tensão confinante. Foi considerado, portanto, um valor  $S$  constante. Porém, o valor  $T$  não pode ser identificado como constante, já que se mostrou dependente do valor da tensão de confinamento  $\sigma_3$  (figura 7.13).



$$a) \sigma_3 = 0.5 \text{ kg/cm}^2$$



$$b) \sigma_3 = 1.0 \text{ kg/cm}^2$$



$$c) \sigma_3 = 2.0 \text{ kg/cm}^2$$

Fig. 7.12 - Relação  $\eta_2$  vs  $f_p$  para calibração da Argila Vermelha

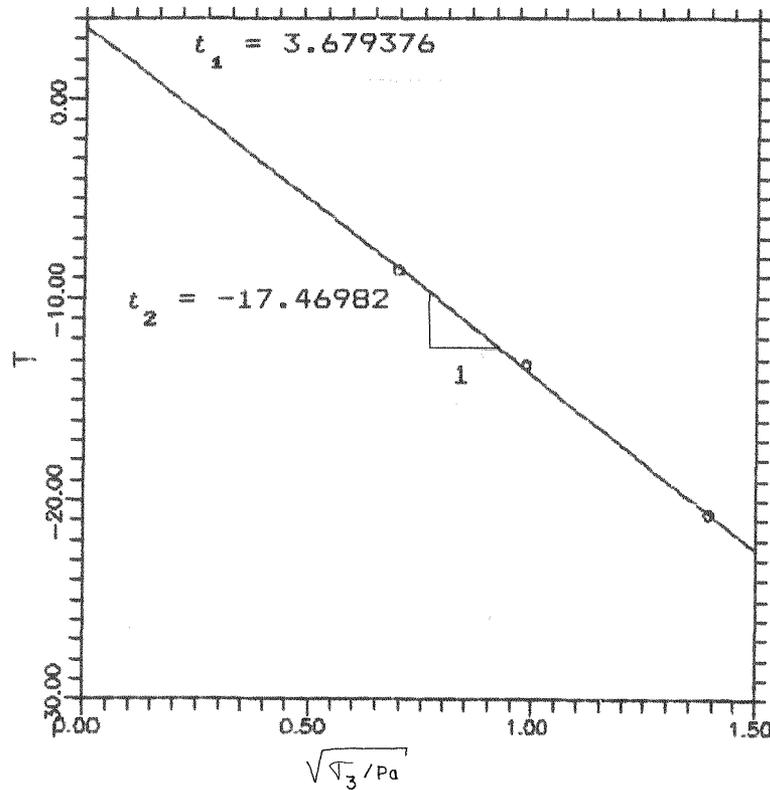


Fig. 7.13 - Obtenção dos parâmetros  $t_1$  e  $t_2$  da Argila Vermelha

Os parâmetros de endurecimento do material ( $\rho$ ,  $l$ ,  $\alpha$  e  $\beta$ ) definem a relação entre o nível de tensões expansivas,  $f_p$ , e o trabalho plástico correspondente,  $W_p$ . Conhecidas as deformações plásticas expansivas, o cálculo do trabalho plástico expansivo é efetuado considerando:

$$W_p = \int \{\sigma\}^T \{d\varepsilon_v^c\} \approx \sum \left[ \sigma_1 \Delta\varepsilon_1^p + 2 \sigma_3 \Delta\varepsilon_3^p \right] \quad (7.15)$$

A relação entre o trabalho plástico expansivo e o valor de  $f_p$  correspondente está representada na figura (7.14) para os diferentes valores de tensão confinante utilizados na calibração. Destes gráficos serão obtidos os valores correspondentes à resistência de pico,  $W_{ppeak}$ , relativo ao

valor máximo  $\eta_1$ , e os valores do trabalho plástico correspondentes ao nível de 50 % de mobilização da resistência de pico.

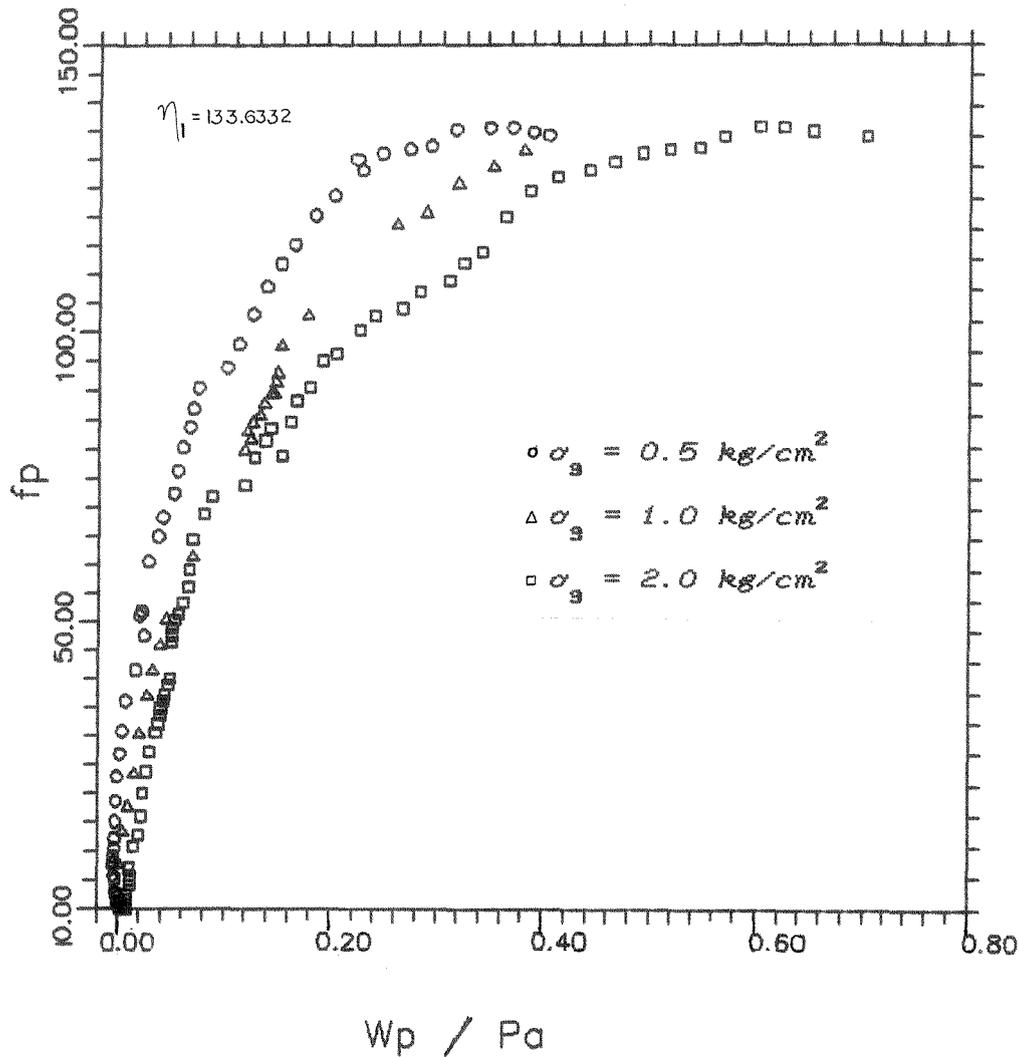


Fig. 7.14 - Relação entre  $f_p$  e  $W_p/pa$

O valor aqui obtido para o parâmetro  $l$  na Argila Vermelha foi diferente da unidade, em contraposição do resultado apresentado por Lade (1979) para o caso da Grundite Clay. Os parâmetros  $P$  e  $l$  foram definidos a partir da representação num gráfico logarítmico dos valores  $W_{ppeak}/pa$  em função de  $\sigma_s/pa$

(figura 7.15). A inclinação da reta que melhor se ajusta aos pontos de ensaio e a sua interseção com a vertical  $\sigma_3/pa = 1$  fornecem os valores  $l$  e  $p$ , respectivamente.

Os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  são obtidos a partir dos valores de  $q$  calculados para cada curva  $f_p$  vs.  $W_p$  através da relação (Azevedo, 1983):

$$q = \frac{\log \left( \frac{W_{p\text{peak}}}{W_{p\%}} \right) - \left[ 1 - \frac{W_{p\%}}{W_{p\text{peak}}} \right] \log e}{\log \left( \frac{\eta_1}{f_{p\%}} \right)} \quad (7.16)$$

onde  $e$  corresponde à base do logaritmo natural e  $(W_{p\%}, f_{p\%})$  representa qualquer ponto da curva  $f_p$  vs.  $W_p$  para uma certa percentagem de resistência de pico mobilizada. Lade (1977)

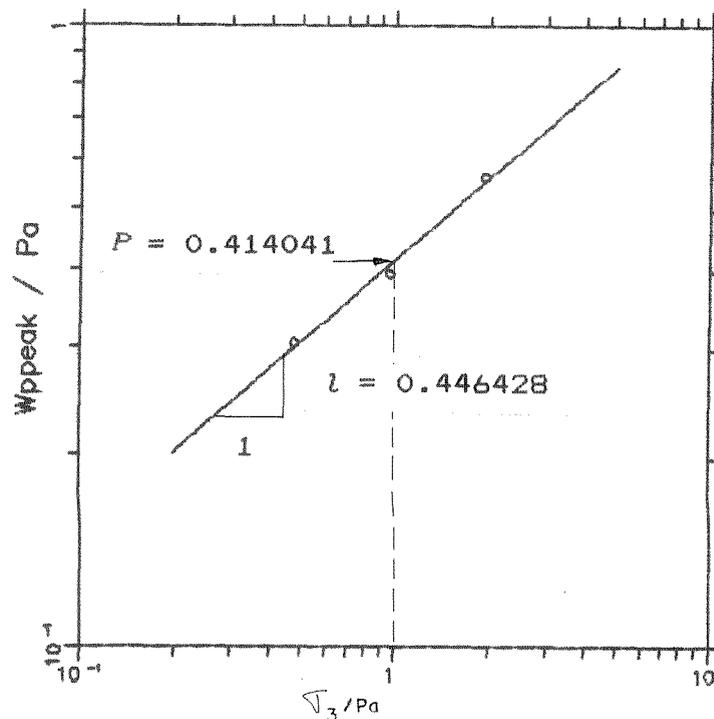


Fig. 7.15 - Obtenção dos parâmetros  $p$  e  $l$  da Argila Vermelha

sugere se utilize o ponto correspondente ao 60% da resistência de pico. Para a Argila Vermelha, o valor correspondente ao 50% da resistência foi considerado mais representativo.

Para o caso da Grundite Clay, o valor do parâmetro  $q$  obtido mostrou-se independente do valor da tensão confinante. A figura (7.16) mostra os valores obtidos para a Argila Vermelha. O valor correspondente ao ensaio com tensão de confinamento de  $1.0 \text{ kg/cm}^2$  não foi utilizado na correlação. O valor de  $q$  foi considerado constante e, portanto, independente da tensão de confinamento. Foi efetuada uma análise paramétrica que mostrou apenas uma pequena influência, nas reconstituições dos ensaios CTC, do valor do parâmetro  $q = \text{cte}$  adotado.

A tabela (7.1) mostra os parâmetros do modelo obtidos na calibração da Argila Vermelha. Todos estes parâmetros são adimensionais.

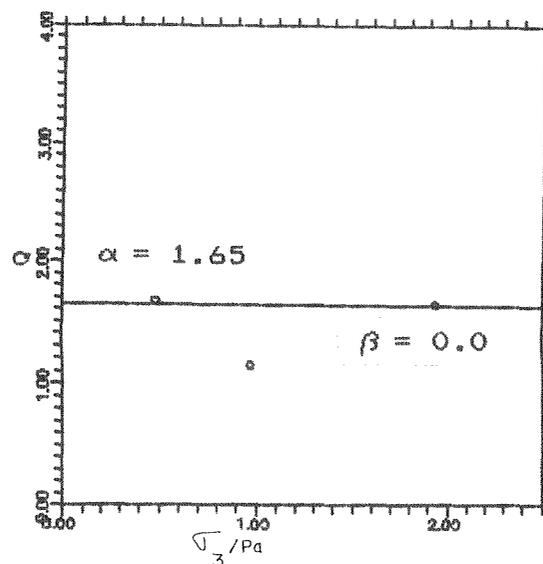


Fig. 7.16 - Obtenção dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  da Argila Vermelha

Tabela 7.1

*Parâmetros da Argila Vermelha Correspondentes ao Modelo Elasto-Plástico de Lade*

ARGILA VERMELHA			
Parâmetros Elásticos		$K_{ur} = 153.9736$	
		$n = 0.568546$	
		$\nu = 0.25$	
Parâm. Plást.	Colapsível		$\rho = 0.01985998$
	Expansivos	Ruptura	$\eta_1 = 133.6332$ $m = 0.884275$
		Potencial Plástico	$s_1 = 0.4054$ $s_2 = 0.0$ $t_1 = 3.679376$ $t_2 = -17.46982$
		Endurecimento	$P = 0.414041$ $l = 0.446428$ $\alpha = 1.65$ $\beta = 0.0$

### 7.2.3. Comparação entre Resultados Experimentais e a Predição do Modelo de Lade

Conhecidos os parâmetros do modelo, para um determinado incremento de tensões, o incremento de deformações elásticas, plásticas colapsíveis e plásticas expansivas poderão ser obtidas através da integração das equações constitutivas, segundo foi visto na seção 5.4.4. Assim, a trajetória de

deformações correspondente a ensaios de laboratório cuja trajetória de tensões é conhecida, pode ser definida analiticamente através de um processo incremental.

A figura (7.17) mostra a comparação entre as curvas obtidas experimental e analiticamente para o caso do ensaio de compressão hidrostático utilizado. A concordância é muito boa validando, desta forma, o parâmetro plástico colapsível obtido durante o processo de calibração. Observa-se que, para obter a

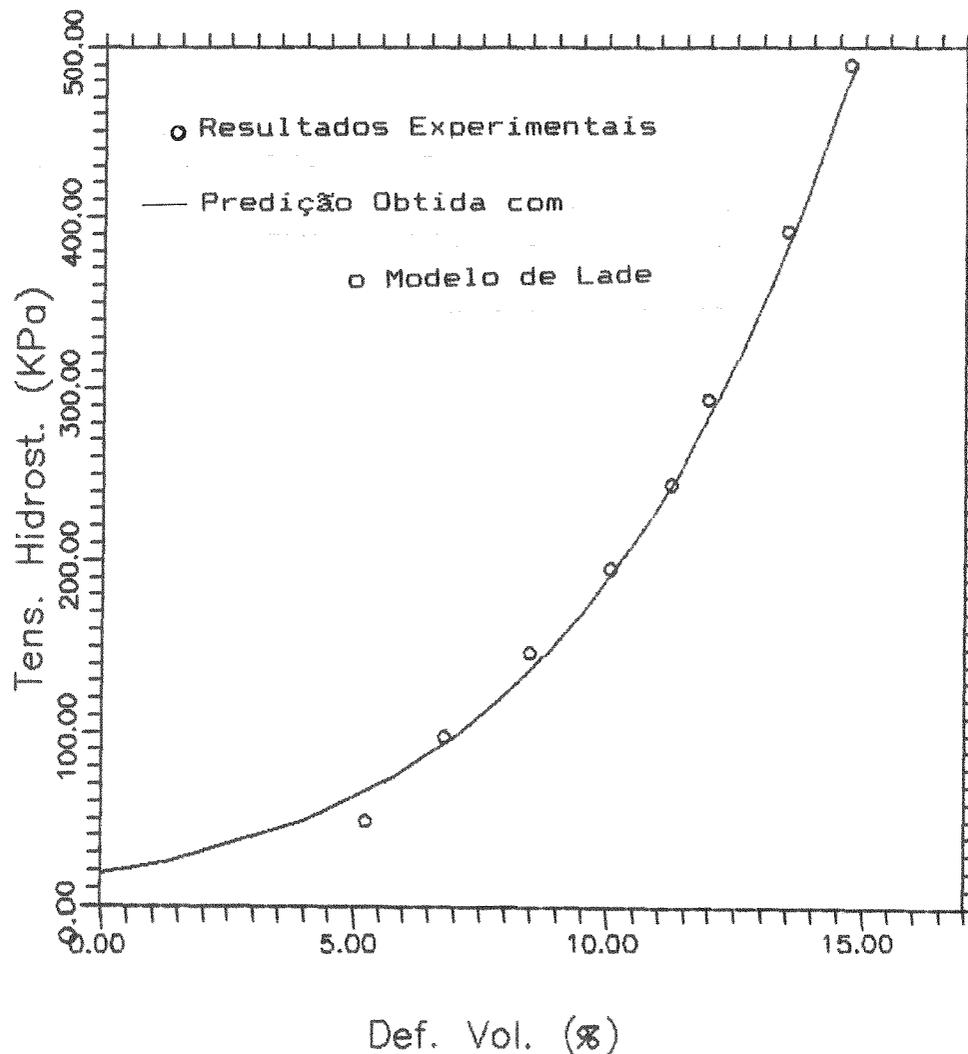


Fig. 7.17 - Comparação entre os resultados experimentais do ensaio HC e a predição do modelo de Lade

concordância entre as duas curvas, o valor da pressão hidrostática inicial na representação analítica corresponde a 20.0 Kpa aproximadamente. Este valor é totalmente compatível com os valores de sucção correspondentes a este material parcialmente saturado obtidos por Küpper (1983).

As figuras (7.18), (7.19) e (7.20) mostram a comparação entre os resultados analíticos e os valores obtidos no laboratório para o caso dos ensaios convencionais de compressão triaxial utilizados na calibração deste material, correspondentes a valores de tensão confinante de 0.5, 1.0 e 2.0 kg/cm<sup>2</sup>, respectivamente. A correspondência é muito boa, validando o processo utilizado para a calibração e evidenciando a capacidade do modelo para representar o comportamento da Argila Vermelha de São Paulo. Tanto as tensões desviadoras quanto as deformações volumétricas são corretamente representadas com a utilização dos parâmetros do modelo indicados na tabela (7.1).

Uma trajetória de tensões que pode ser considerada representativa dentre as desenvolvidas num processo de escavação é a trajetória de descarregamento lateral, onde a tensão vertical é mantida constante e a tensão confinante é diminuída desde um estado hidrostático inicial. Os resultados experimentais dos ensaios de descarregamento lateral desenvolvidos por Parreira (1989) são comparados com os resultados obtidos incrementalmente com os parâmetros obtidos na calibração. A correspondência entre as curvas obtidas

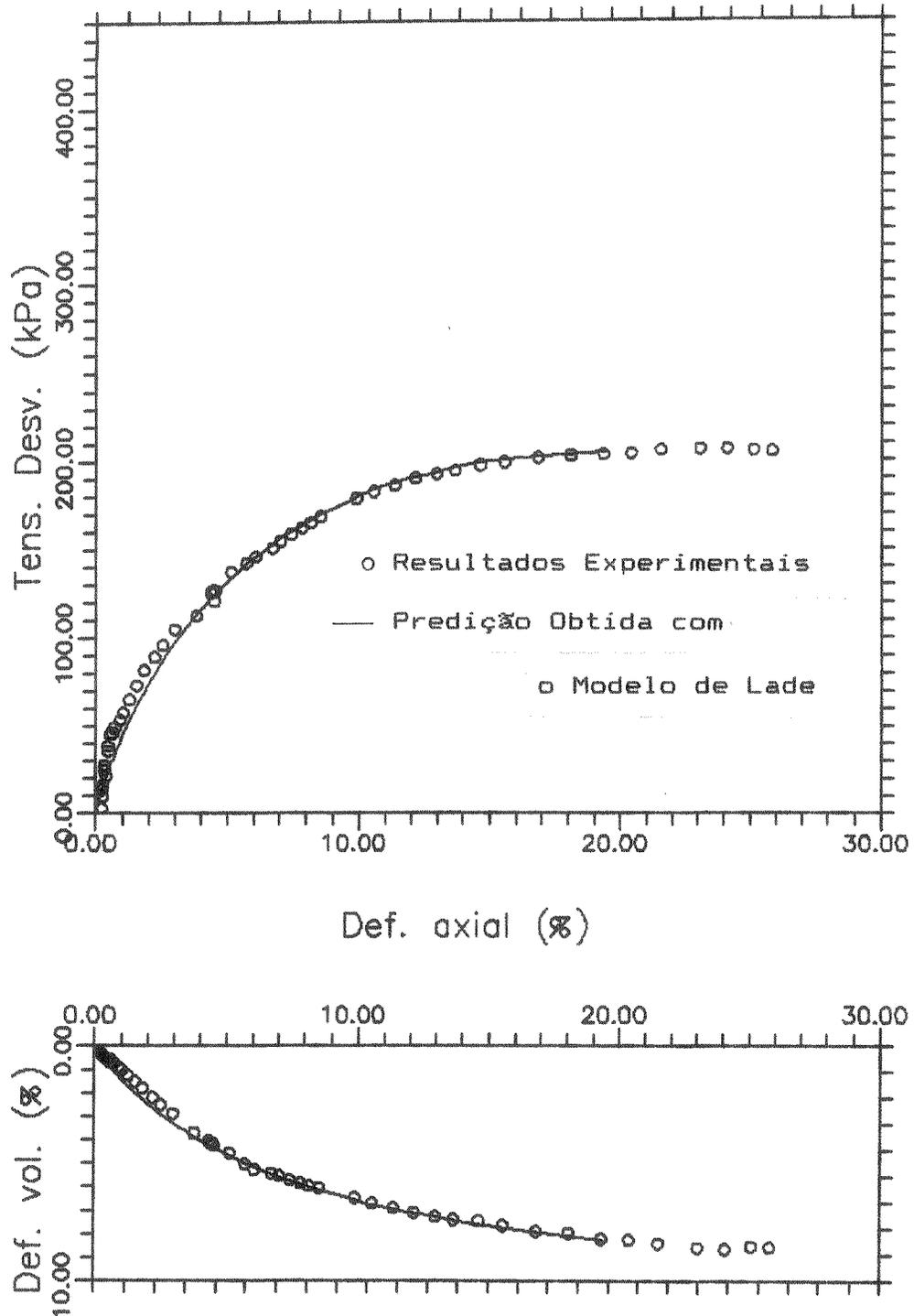


Fig. 7.18 - Comparação entre os resultados experimentais do ensaio CTC ( $\sigma_s = 0.5 \text{ kg/cm}^2$ ) e a predição do modelo de Lade

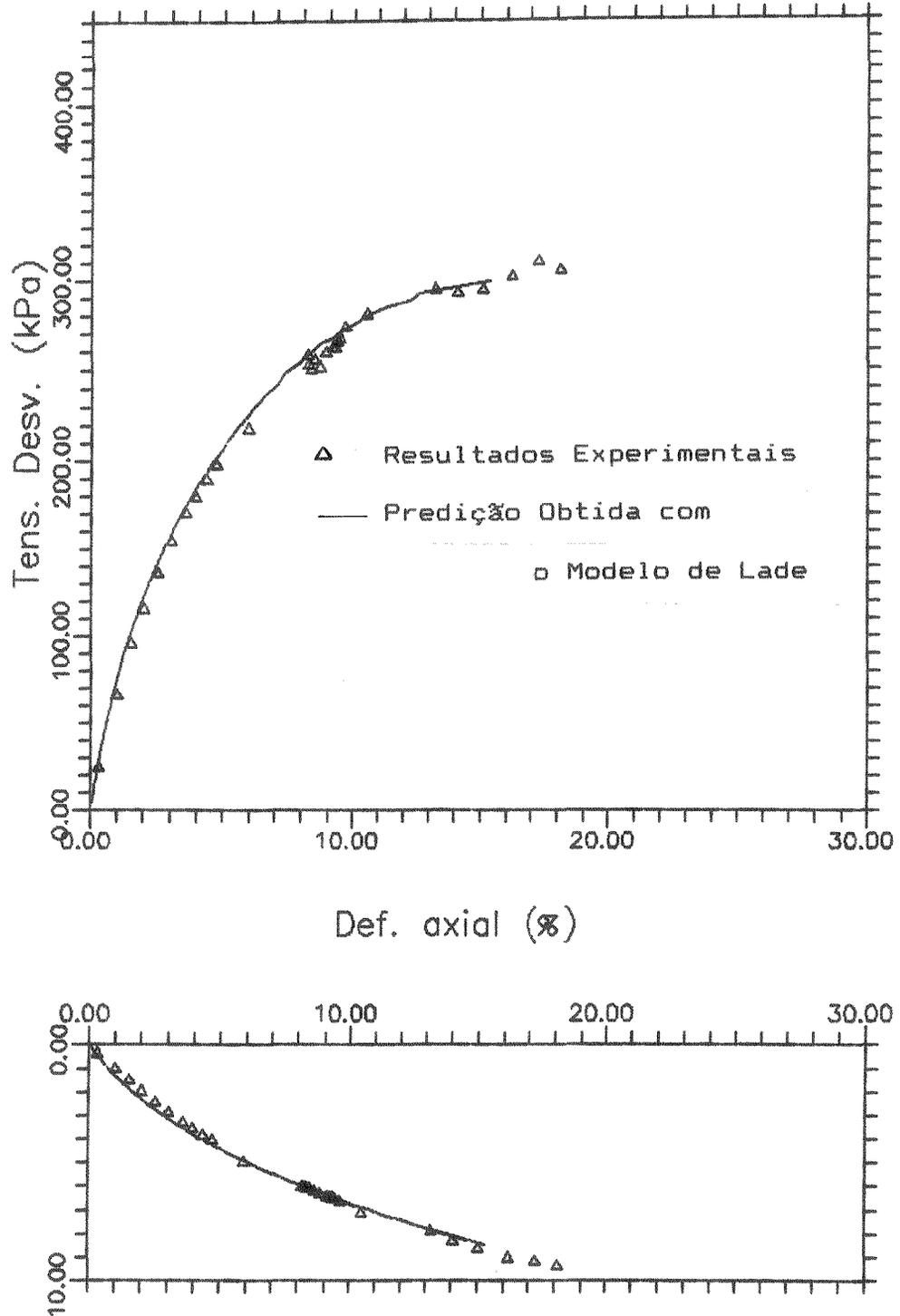


Fig. 7.19 - Comparação entre os resultados experimentais do ensaio CTC ( $\sigma_3 = 1.0 \text{ kg/cm}^2$ ) e a predição do modelo de Lade

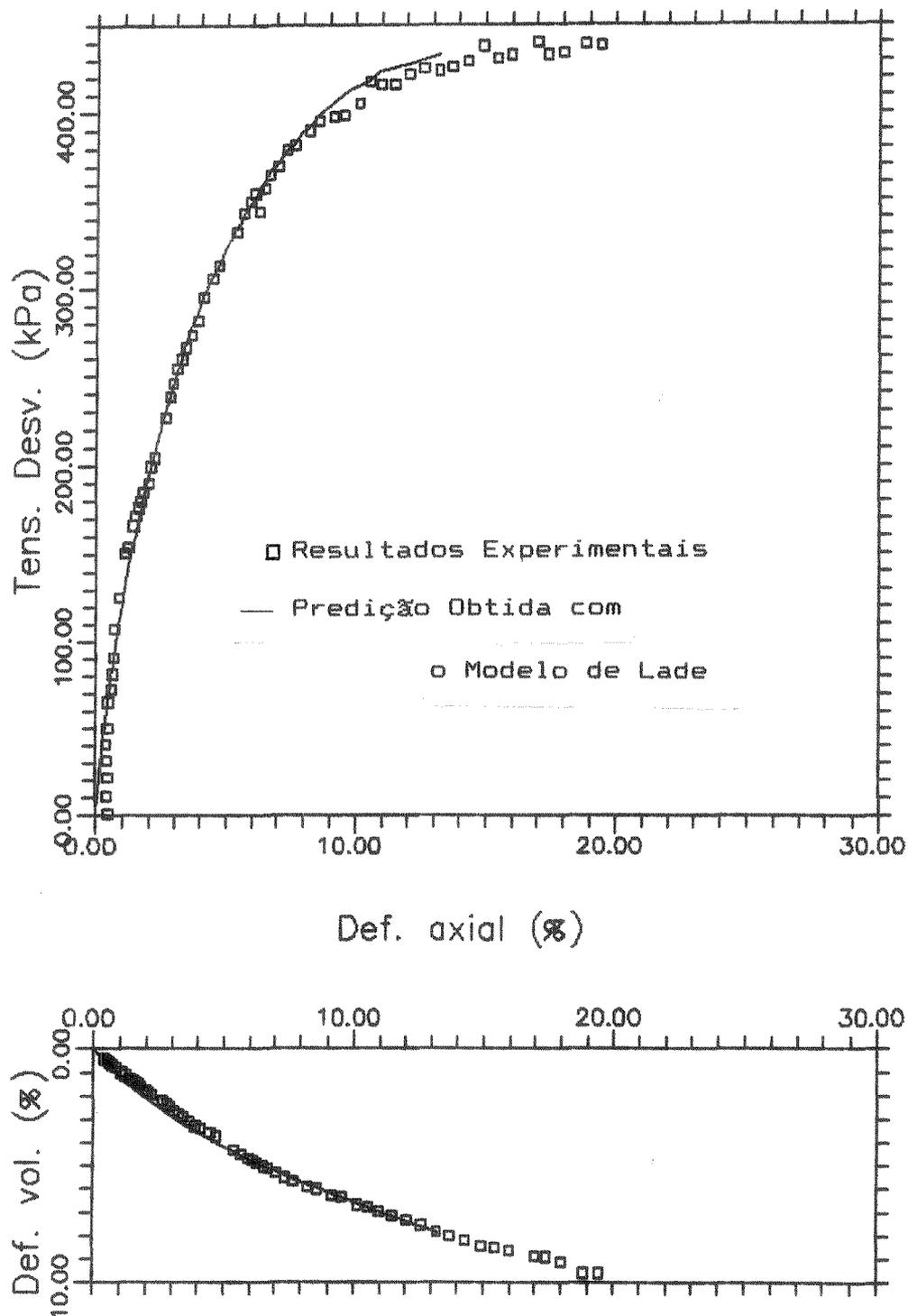
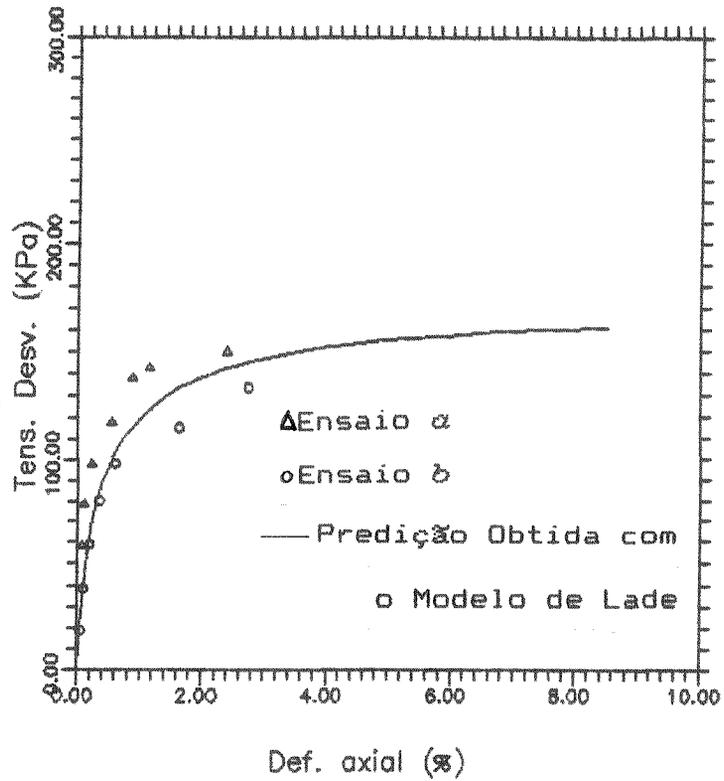


Fig. 7.20 - Comparação entre os resultados experimentais do ensaio CTC ( $\sigma_s = 2.0 \text{ kg/cm}^2$ ) e a predição do modelo de Lade

experimental e analiticamente para o caso dos ensaios de descarregamento lateral é apresentada nas figuras (7.21 a) e (7.21 b), considerando os ensaios desenvolvidos desde estados iniciais hidrostáticos de 2.0 e 4.0 kg/cm<sup>2</sup>, respectivamente. Observa-se uma boa concordância entre os valores experimentais e os valores analíticos.

Os parâmetros do modelo foram calibrados utilizando ensaios de compressão hidrostática e ensaios de compressão triaxial. A boa concordância obtida com as curvas de descarregamento lateral permite validar os parâmetros definidos com os procedimentos previamente indicados caso sejam desenvolvidas trajetórias de tensões diferentes das correspondentes aos ensaios utilizados na calibração do modelo. As curvas correspondentes às deformações volumétricas não são apresentadas devido à dificuldade na determinação desta magnitude num material parcialmente saturado no ensaio de descarregamento lateral. A correspondência obtida entre estes valores mostra a importância da utilização do modelo de Lade numa obra de escavação, onde as trajetórias de tensões desenvolvidas no campo diferem das trajetórias tradicionalmente utilizadas nos ensaios de laboratório.

$$a) \sigma_1 = 2.0 \text{ kg/cm}^2$$



$$b) \sigma_1 = 4.0 \text{ kg/cm}^2$$

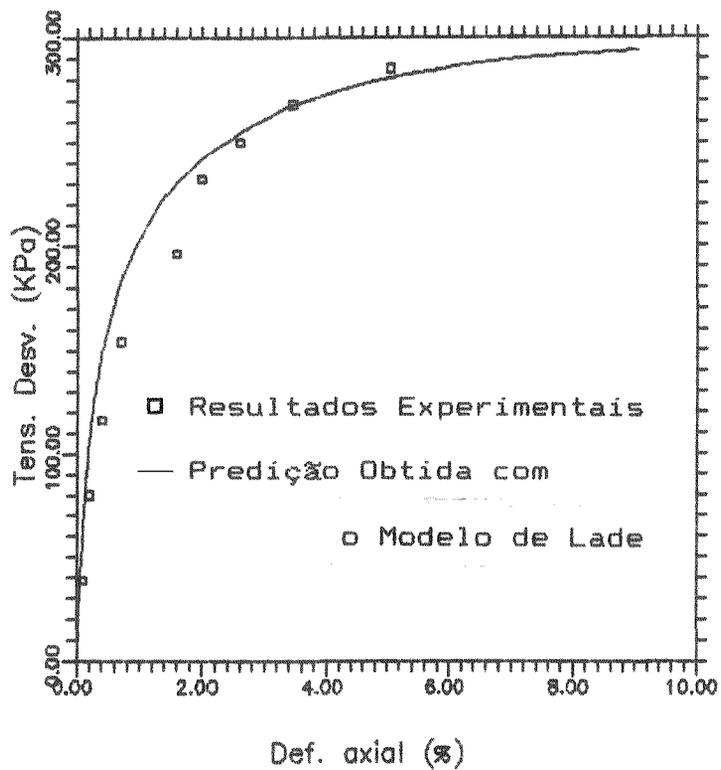


Fig. 7.21 - Comparação entre os resultados experimentais dos ensaios de descarregamento lateral e a predição do modelo de Lade

### 7.3 MODELAGEM DO SOLO VARIEGADO

#### 7.3.1 Características Geotécnicas do Material

Este material se encontra logo abaixo da Argila Vermelha, em torno da cota onde surge o lençol de água. Esta camada apresenta uma grande heterogeneidade quanto à sua composição granulométrica, variando desde argilas quase puras até areias finas argilosas. A fração silte é sempre relativamente pequena nestes solos. A sua coloração varia muito, sendo encontrado nas tonalidades amarelo, vermelho e branco, daí a sua denominação variegado.

Segundo Sousa Pinto e Massad (1972) a pressão de sobre-adensamento deste material não é função da cota, nem da profundidade da amostra, sendo geralmente crescente com o teor de argila. O valor da pressão de pré-adensamento na amostra do material estudado foi de aproximadamente  $8.0 \text{ Kg/cm}^2$ . Explicar-se-ia este sobre-adensamento relacionado com a percentagem de finos como consequência da tensão capilar devido a secamento ou a uma cimentação química das argilas.

#### 7.3.2 Obtenção dos Parâmetros do Material

Serão obtidos os parâmetros do material retirado a uma profundidade de 12.30m, correspondente à camada de Solo Variegado. O material encontra-se localizado abaixo do lençol freático e, portanto, foram desenvolvidos ensaios drenados em

amostras saturadas.

Na seção 3.4.4 foi desenvolvido o processo de calibração proposto para o caso de argilas pré-adensadas. Devido à pressão de sobre-adensamento que apresenta este material, as superfícies iniciais de plastificação se encontram sensivelmente expandidas. Considerando que o solo variegado constitui a camada inferior do problema de escavação a ser analisado, as trajetórias de tensões a serem desenvolvidas neste material serão basicamente de descarregamento axial ou lateral envolvendo essencialmente deformações elásticas.

Adotaram-se, portanto, simplificações no modelo utilizado. Consideraram-se as superfícies de plastificação iniciais suficientemente expandidas de forma que o material trabalhe na região elástica. Desta maneira, este solo pré-adensado será, na verdade, considerado como um material elástico-perfeitamente plástico, já que a plastificação do solo ocorrerá logo antes de se atingir a superfície de ruptura. Os parâmetros de ruptura do material e os parâmetros relativos às deformações elásticas são definidas pelas expressões correspondentes ao modelo de Lade. As deformações plásticas não serão consideradas e, portanto, os parâmetros correspondentes não precisam ser determinados.

A representação no gráfico logarítmico da equação (7.1) permite a determinação dos parâmetros elásticos  $K_{ur}$  e  $n$  correspondentes ao solo variegado. Os valores experimentais obtidos a partir dos ensaios drenados de compressão triaxial

convencional desenvolvidos por Parreira (1989) com este material estão representados na figura (7.22) onde são indicados os valores dos parâmetros aqui obtidos.

O coeficiente de Poisson,  $\nu$ , foi considerado constante. De acordo com a figura (3.8), e para um Índice de Plasticidade  $I.P. = 43.4$  obtido para o Solo Variegado, o coeficiente a ser utilizado será  $\nu = 0.29$ .

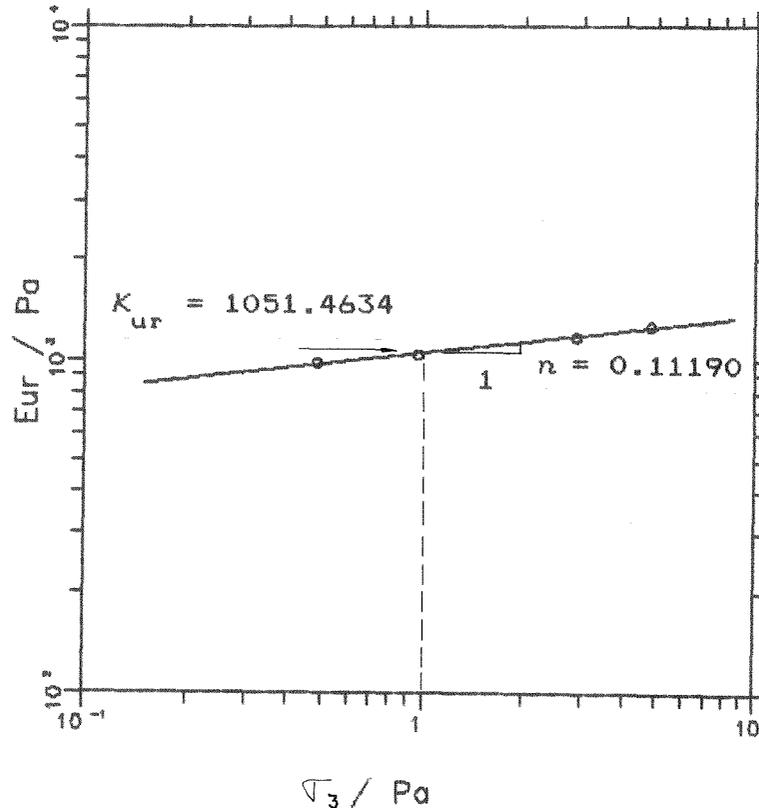


Fig. 7.22 - Obtenção dos parâmetros elásticos do Solo Variegado

Os parâmetros que caracterizam a superfície de ruptura do Solo Variegado foram definidos através do mesmo procedimento de calibração utilizado para o caso da Argila Vermelha. A

representação da equação (7.10) num gráfico logarítmico está indicada na figura (7.23), onde são indicados os valores dos parâmetros  $\eta_1$  e  $m$  correspondentes a este material.

A tabela (7.2) mostra os parâmetros utilizados para representar o comportamento do Solo Variegado.

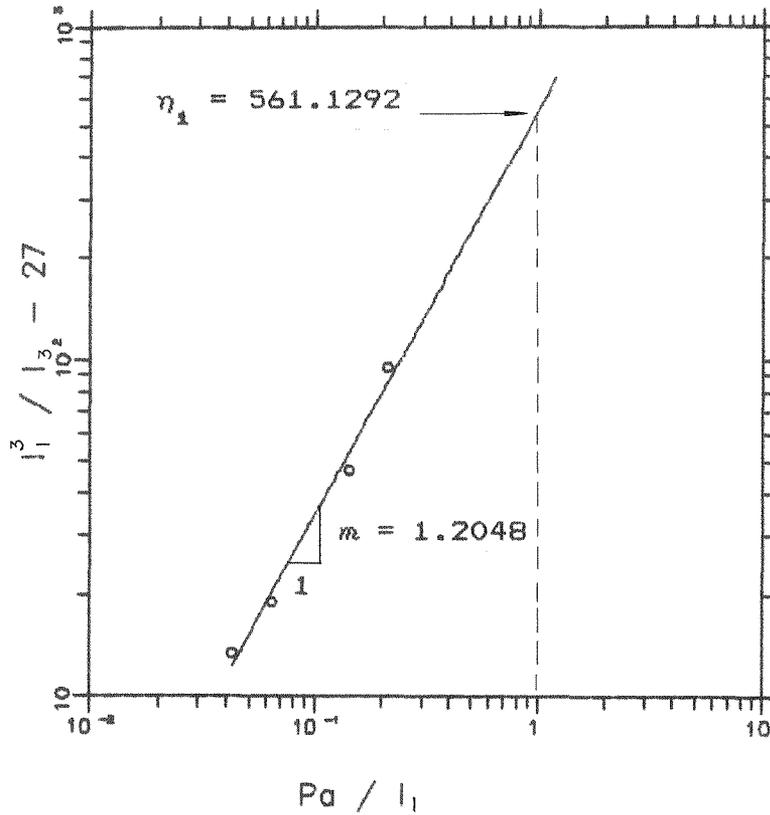


Fig. 7.23 - Obtenção dos parâmetros de ruptura do Solo Variegado

Tabela 7.2

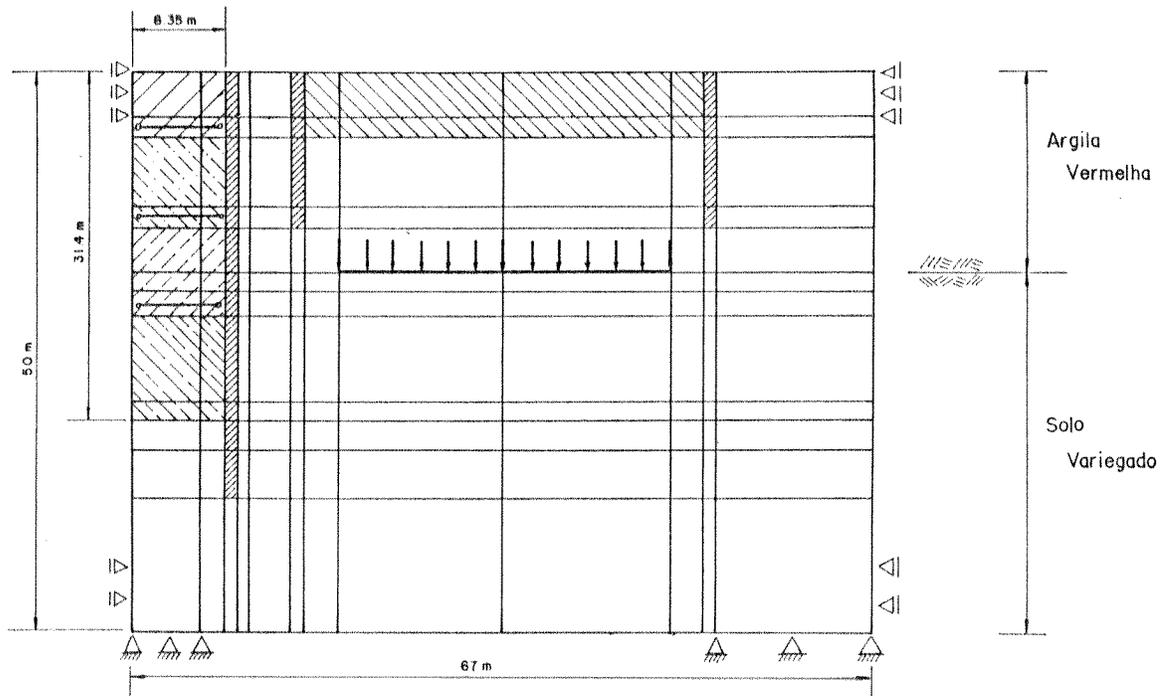
*Parâmetros do Solo Variegado*

SOLO VARIEGADO	
Parâmetros Elásticos	$K_{ur} = 1051.4634$ $n = 0.111901$ $\nu = 0.29$
Parâmetros de Ruptura	$\eta_1 = 561.1292$ $m = 1.2048$

#### 7.4 HIPÓTESES DE CÁLCULO

##### 7.4.1 Representação do Meio Contínuo

A malha de elementos finitos utilizada para a análise do problema está representada na figura (7.24), que corresponde à seção média do lado maior da escavação. O problema em estudo foi considerado bidimensional (corte A - A da figura 7.4). A malha compreende 481 pontos nodais e 147 elementos, 3 dos quais correspondem a elementos de barra, consistindo o resto em elementos planos iso-paramétricos de 8 nós. Na figura estão também indicadas algumas das características dos diferentes elementos nas etapas construtivas a serem simuladas.



- Elementos de barra inicialmente desativados
- ▨ Elementos representativos da estrutura de suporte
- ||| Carga distribuída a ser considerada na etapa 2
- ▧ Elementos inicialm. ativados a serem desativados na etapa 1
- ▩ Elementos inicialm. ativados a serem desativados na etapa 4
- Elementos inicialm. ativados a serem desativados na etapa 5
- Elementos inicialm. ativados a serem desativados na etapa 6
- ▬ Elementos inicialm. ativados a serem desativados na etapa 7

Fig. 7.24 - Malha de elementos finitos utilizada

A fronteira lateral esquerda da malha corresponde ao plano de simetria da seção analisada, distando 8,35 m dos elementos representativos da parede. A rigor, o problema em estudo não terá uma distribuição simétrica no seu estado inicial de tensões, porém, a condição de simetria proposta foi considerada aceitável. A fronteira lateral direita foi definida a 67,0 m do eixo de simetria. Nas fronteiras referidas, são impedidos os

deslocamentos segundo a horizontal. A fronteira inferior da malha, na qual são impedidos quaisquer deslocamentos foi situada 50.0 m abaixo da superfície do terreno, profundidade aceitável considerando a elevada rigidez do Solo Variegado.

Seria aconselhável estudar-se a influência de um maior refinamento da malha utilizada, assim como a influência de se estender os limites da mesma, nos resultados obtidos. No entanto, a capacidade de memória do equipamento utilizado limitou a análise ao tamanho aqui indicado, mesmo tendo-se recorrido ao processo de segmentação do código do programa para aumentar a quantidade de memória disponível. Duas opções ainda são possíveis para aumentar o tamanho da malha; a primeira consiste na utilização de alguma das técnicas de simetrização da matriz de rigidez (seção 4.2.2), enquanto que a segunda se refere à utilização de recursos tais como o uso de memória estendida para o processamento do problema. A análise considerando a simetrização da matriz de rigidez foi aqui efetuada considerando a mesma malha do problema inicial com o propósito de comparar os resultados obtidos, o tempo de processamento e a quantidade de memória utilizada nas duas abordagens do problema.

Foram utilizadas duas camadas de solo, considerando-se os parâmetros obtidos nas seções 7.2 e 7.3 para a Argila Vermelha e o Solo Variegado. Resta apenas definir os parâmetros que caracterizam o comportamento da estrutura de suporte.

A representação de elementos descontínuos, tais como as estacas metálicas e as estroncas presentes neste estudo, foi analisada por Tsui and Clough (1974). Eles concluíram que a melhor representação destes elementos estruturais é aquela em que a rigidez flexional das estacas da parede e a rigidez axial das estroncas e/ou tirantes são estabelecidas por unidade de comprimento longitudinal. Este procedimento foi então adotado no presente trabalho, no qual considerou-se os parâmetros elásticos do aço ASTM A-36 (NBR 8800/1986):

$$E_a = 205\ 000\ 000\ \text{KPa}$$

$$\nu_a = 0.3$$

O perfil soldado utilizado nas estacas (CS 550 x 476) possui um Momento de Inércia  $I = 0.00333993\ \text{m}^4$  (Companhia do Metropolitano de São Paulo, 1982). Considerando o espaçamento entre estacas de 2.225 m, tem-se uma Rigidez Flexional de:

$$(EI)_{\text{estacas}} = 307729.692\ \text{KPa} \times \text{m}^4 \text{ por metro longitudinal}$$

Como a espessura do elemento utilizado para representar a parede na malha de elementos finitos utilizada (figura 7.24) é de 1.0 m, o Momento de Inércia correspondente será de  $0.08333\ \text{m}^4$  por metro longitudinal, com o que o módulo de elasticidade equivalente da parede da estrutura de suporte será:

$$E_{\text{parede}} = \frac{(EI)_{\text{estacas}}}{I_{\text{parede}}} = \frac{307729.692}{0.08333} = 3692756.304\ \text{KPa}$$

Existem grandes incertezas acerca da rigidez que as estroncas exibem em serviço, isto é, da rigidez efetiva, que

frequêntemente se afasta de forma muito acentuada do respectivo valor teórico (Mana, 1978; Matos Fernandes, 1983). As escoras foram consideradas com uma rigidez efetiva igual a 70 % da teórica. O módulo de elasticidade obtido considerando um espaçamento de 4.0 m, foi:

$$\langle E \rangle_{\text{elem. barra}} = 28\,500\,000 \text{ KPa por metro longitudinal}$$

Nos níveis 812.0 m e 804.0 m foram utilizados perfis CS 500 x 220 os quais possuem uma área de 0.02801 m<sup>2</sup> (CMSP, 1982). Finalmente, o nível 796.0 m utilizou perfis CS 660 x 655 cuja área é de 0.08345 m<sup>2</sup>.

A interface entre o solo e a estrutura de suporte foi considerada solidária assumindo, portanto, compatibilidade de deslocamentos entre os elementos estruturais e de solo. A utilização de elementos de junta na interface solo-estrutura se refletiria no estado de tensões e deslocamentos próximos à parede, tanto na face interna da escavação quanto na região adjacente externa da estrutura de suporte.

#### 7.4.2 Simulação do Processo Construtivo

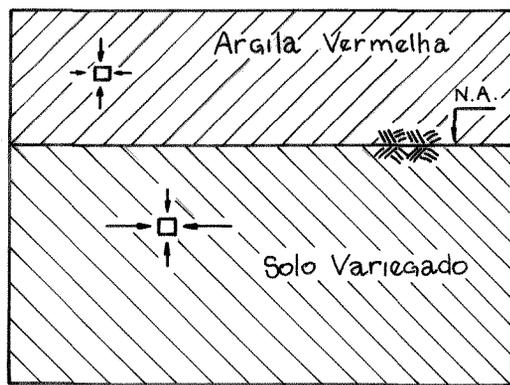
A simulação do processo construtivo foi efetuada através de uma sequência de sete análises não-lineares por elementos finitos. As três primeiras foram desenvolvidas com o intuito de caracterizar o estado de tensões na massa do solo antes do início da escavação do Poço Salas Técnicas. As quatro análises subsequentes corresponderam a cada uma das fases construtivas

da obra em estudo.

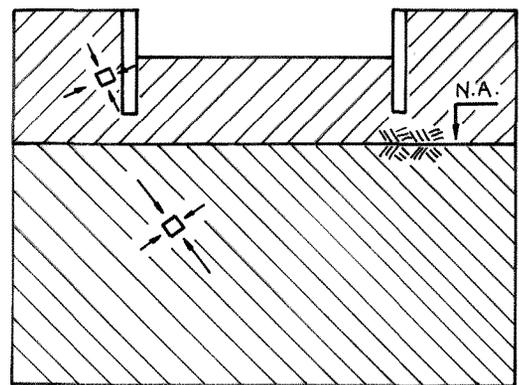
A figura (7.25 a) mostra o estado de tensões geostático que define o estado inicial do problema. O peso específico da Argila Vermelha foi considerado como:

$$\gamma = 14.709 \text{ KN/m}^3$$

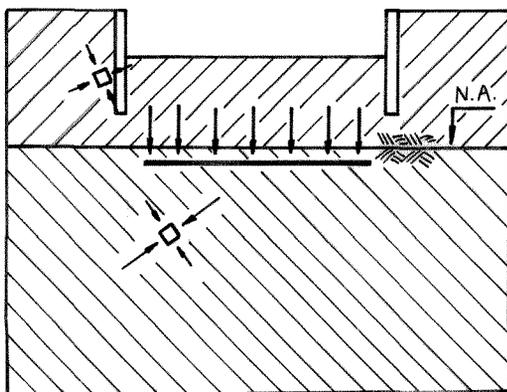
Por sua vez, o valor do coeficiente de empuxo em repouso  $K_0$  deste material foi definido a partir dos resultados obtidos por Massad (1978) com este material, segundo os quais, para uma



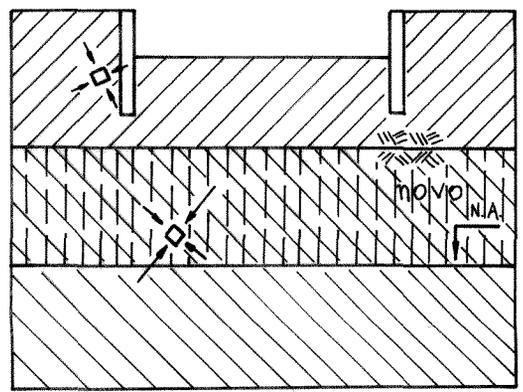
a) Estado Inicial de Tensões



b) Escavação de Subsolos



c) Fundação de Prédio Adj.



d) Rebaixamento de Lençol Fr.

Fig. 7.25 - Etapas da análise anteriores à escavação do Poço Salas Técnicas

relação de sobre-adensamento  $OCR \simeq 2.0$ , resulta:

$$K_0 = 0.73$$

No caso do Solo Variegado, foi considerado:

$$\gamma = 17.1605 \text{ KN/m}^3$$

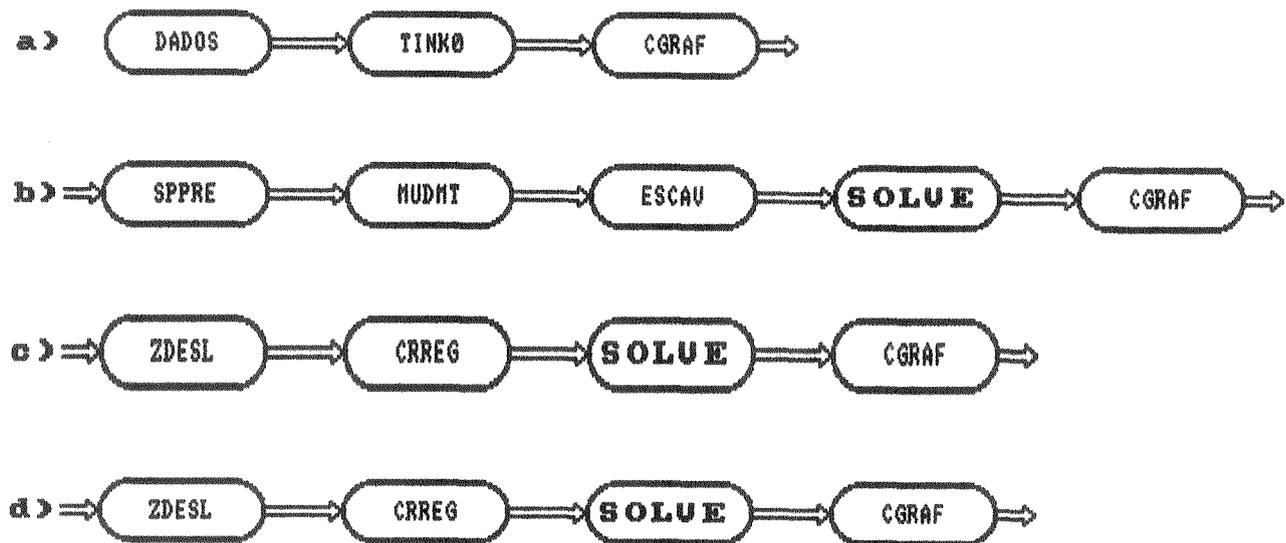
Os valores  $OCR \simeq 4$  e  $IP = 43.4$  correspondentes a este material permitem definir o valor do coeficiente de empuxo em repouso:

$$K_0 = 1.1$$

com base nos resultados de Brooker and Ireland (1965).

O nível de água considerou-se localizado na interface entre a Argila Vermelha e o Solo Variegado. Portanto, o estado inicial de tensões efetivas deste último material foi obtido considerando o solo submerso. Na análise efetuada admitiu-se um comportamento drenado do material e, portanto, as únicas pressões neutras consideradas no Solo Variegado foram as correspondentes à distribuição hidrostática inicial.

A figura (7.26) representa os macro-comandos utilizados com o programa *ANLOG* nas etapas desenvolvidas neste estudo correspondentes à definição do estado de tensões anterior à escavação do Poço Salas Técnicas. A simulação numérica da etapa inicial (figura 7.26  $\alpha$ ) consistiu na leitura dos dados da malha a ser utilizada, dos parâmetros dos materiais e das condições de contorno do problema (macro-comando *DADOS*), procedendo posteriormente à definição do estado geostático de tensões (*TINKO*) e à criação dos arquivos de saída gráfica (*CGRAF*).



*Fig .7.26 - Macro-comandos utilizados nas etapas da análise anteriores à escavação do Poço Salas Técnicas*

A figura (7.25 b) corresponde à primeira análise por elementos finitos deste estudo, na qual é simulada a escavação de dois subsolos no prédio adjacente ao Poço Salas Técnicas. Pode ser observada a variação nas tensões principais na massa de solo provocada nesta etapa da análise. Os macro-comandos utilizados nesta etapa (figura 7.26 b) permitem localizar as superfícies de plastificação do Solo Variegado representando assim o nível de pré-adensamento do material (SPPRE). Foram então caracterizados os elementos que constituirão a estrutura de suporte dos subsolos a serem escavados (MUDMT), procedendo posteriormente à excavação dos elementos (ESCAV) e finalmente à resolução do problema não-linear de elementos finitos (SOLVE).

A simulação da fundação da edificação vizinha de 17 pavimentos está representada na figura (7.25 c). A cota de fundação e o valor do carregamento considerados foram os utilizados pela CMSP na fase de projeto das Salas Técnicas.

Nesta etapa da análise, os deslocamentos foram inicialmente zerados (*ZDESL*) para obtenção dos valores dos deslocamentos decorrentes apenas da ação das forças de superfície definidas com o uso do macro-comando *CRREG* (figura 7.26 c).

A figura (7.25 d) representa o rebaixamento do nível de água desde a sua localização inicial até pouco abaixo do fundo da escavação a ser executada. O acréscimo de tensões efetivas provocado pelo rebaixamento foi simulado considerando o carregamento provocado por forças de massa iguais ao peso específico da água ( $\gamma_v = 9.806 \text{ KN/m}^3$ ) aplicado nos elementos indicados na figura. Esta abordagem fornecerá resultados aproximados já que, a rigor, deveria ser considerada a rede de fluxo correspondente a um regime estacionário originado pelo bombeamento efetuado junto à parede da escavação. Neste caso o problema poderia ser abordado considerando o acréscimo de tensões efetivas correspondente a cada ponto de integração da malha de elementos finitos. Na análise efetuada (figura 7.26 d) as forças de massa aplicadas foram definidas com a utilização do macro-comando *CRREG*.

Uma vez caracterizado o estado de tensões procede-se à simulação das etapas deste estudo correspondentes às 4 fases da escavação do Poço Salas Técnicas. A figura (7.27) representa as fases consideradas nesta análise. A figura (7.28) mostra os macro-comandos utilizados no prosseguimento da análise iniciada com os comandos indicados na figura (7.26). Na primeira fase da escavação (figura 7.27 a), não é considerada a presença de

estroncas. Nesta etapa do estudo (figura 7.28 a) serão zerados os deslocamentos totais (ZDESL) e definida a estrutura de suporte desta obra (MUDMT), procedendo então à definição das forças nodais equivalentes decorrentes da simulação do processo de escavação e à resolução do problema.

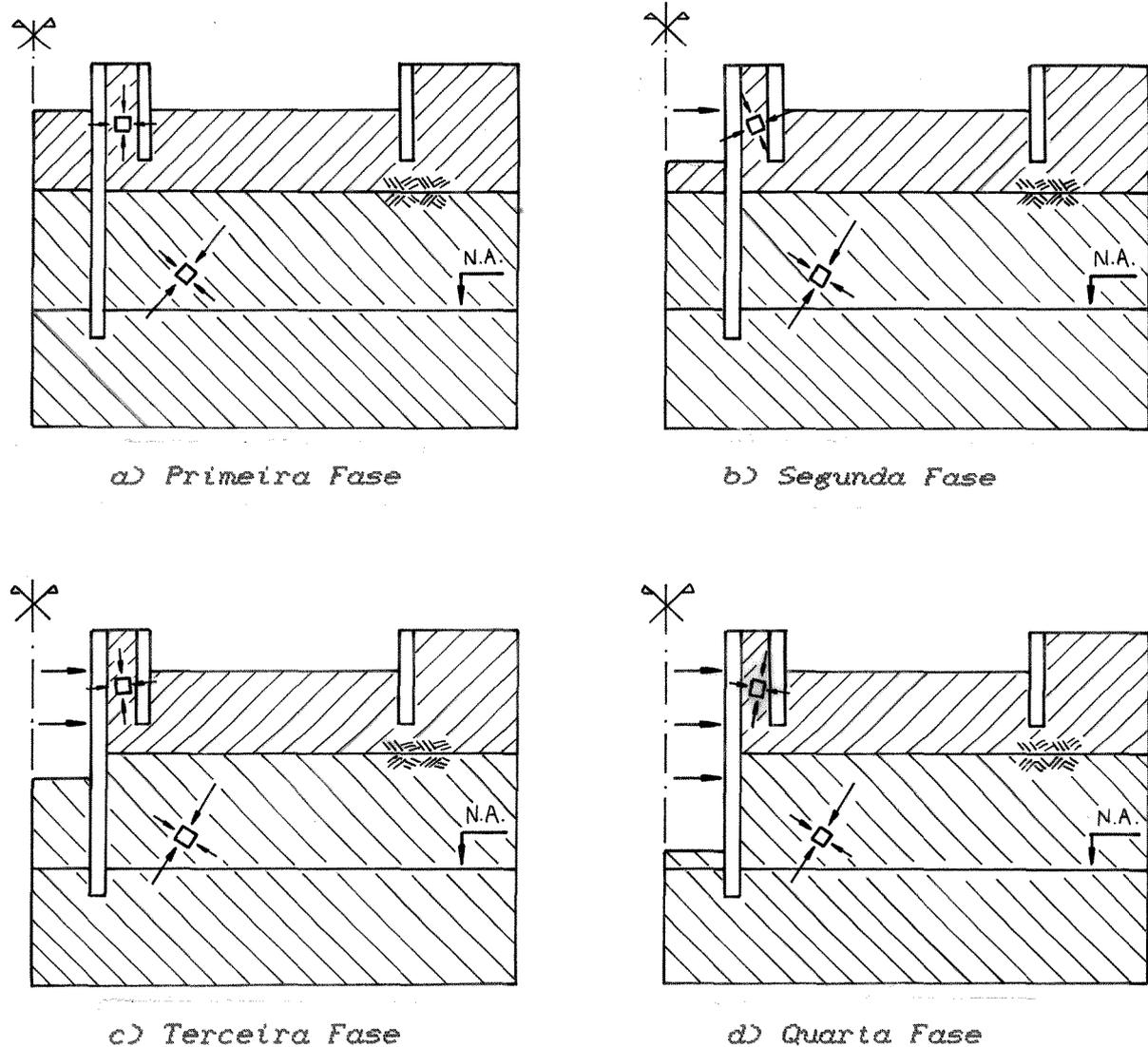
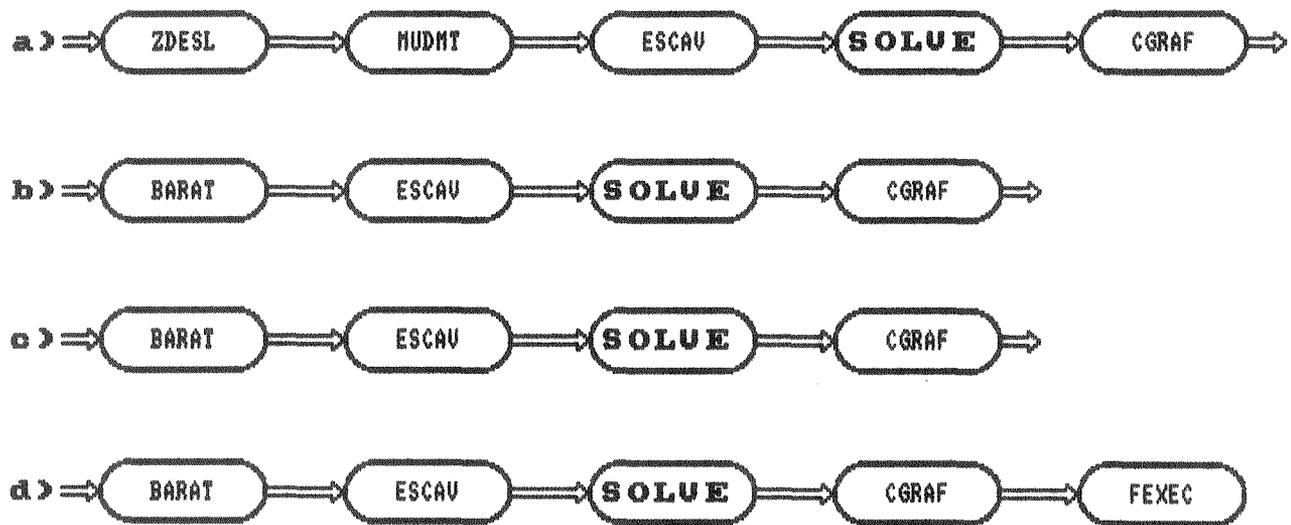


Fig. 7.27 - Etapas da análise correspondentes à escavação do Poço Salas Técnicas

A ativação de um nível de escoras e a posterior escavação são as etapas desenvolvidas nas fases subsequentes deste estudo, segundo indicado nas figuras (7.27 b), (7.27 c) e (7.27 d). Nestas fases do processo de escavação, a ativação dos correspondentes elementos de barra é executado por meio do macro-comando *BARAT* (figuras 7.28 b, 7.28 c e 7.28 d).



*Fig .7.28 - Macro-comandos utilizados nas etapas da escavação do Poço Salas Técnicas*

## 7.5 RESULTADOS OBTIDOS

### 7.5.1 Análise das Tensões e Deslocamentos na Massa de Solo

A seguir, são apresentados os campos de deslocamentos e as tensões principais resultantes das diferentes etapas desenvolvidas neste estudo. Os resultados aqui apresentados foram obtidos utilizando o Método de Newton-Raphson Standard como método de resolução do problema não-linear. A matriz de rigidez utilizada foi não-simétrica, não sendo considerado

nenhum processo de simetrização da matriz constitutiva. Em cada uma destas análises, as forças externas foram aplicadas considerando cinco incrementos de carga.

Cada uma das saídas gráficas a serem apresentadas foram obtidas a partir dos macro-comandos *CGRAF* fornecidos em cada uma das análises efetuadas (figuras 7.26 e 7.28) que permitem a criação dos arquivos necessários.

A figura (7.29) mostra o estado de tensões geostáticas considerado como estado inicial de tensões do problema em estudo. Nem todos os pontos de Gauss de integração são apresentados com o objetivo de uma maior clareza na representação.

A figura (7.30 *a*) apresenta o campo de deslocamentos decorrente da escavação dos dois subsolos do prédio adjacente ao Poço Salas Técnicas. A escavação, executada na Argila Vermelha, apresentou um grande levantamento de fundo devido à elevada deformabilidade deste material. A variação na magnitude das tensões principais e a rotação das mesmas pode ser observada na figura (7.30 *b*). Nenhum ponto atingiu o estado de ruptura do material.

A figura (7.31 *a*) mostra o campo de deslocamentos obtido como consequência da carga distribuída aplicada no Solo Variado através da fundação do prédio adjacente por meio de tubulões. Os deslocamentos foram zerados no início desta

análise de tal forma que os deslocamentos representados são apenas os decorrentes do carregamento mencionado, não sendo acumulados aos deslocamentos obtidos na etapa anterior. As tensões principais são observadas na figura (7.31 b). Nenhum ponto alcançou o estado de ruptura. A capacidade de carga final ficou longe de ser atingida.

O rebaixamento do lençol freático considerado provocou o campo de deslocamentos indicado na figura (7.32 a). Apenas deslocamentos verticais foram obtidos porque o rebaixamento foi considerado uniforme na análise. A alteração ocasionada nos valores das tensões principais é apresentada na figura (7.32 b). Este campo de tensões representa o estado da massa de solo prévio ao início da escavação do Poço Salas Técnicas. A obtenção deste estado de tensões foi, a rigor, o objetivo da execução das análises até agora desenvolvidas. Percebe-se uma notória diferença entre estes valores e a distribuição geostática de tensões da figura (7.29).

A figura (7.33 a) mostra o campo de deslocamentos obtido após a primeira fase da escavação do Poço Salas Técnicas. O levantamento de fundo é significativo. Os deslocamentos consideráveis ocorrem apenas na camada de Argila Vermelha. A figura (7.33 b) apresenta o campo de tensões obtido nesta análise.

As figuras (7.34 a) e (7.34 b) mostram os resultados obtidos na segunda fase desta escavação. Um primeiro nível de

estroncas foi considerado nesta etapa. Os deslocamentos aqui apresentados não são os decorrentes apenas das forças externas aplicadas nesta etapa, mas foram somados a estes os deslocamentos obtidos na fase anterior.

Os deslocamentos totais obtidos desde o início desta escavação até a finalização da terceira fase da mesma, são apresentados na figura (7.35 a). O fundo da escavação, localizado no Solo Variegado, não apresenta o levantamento significativo mostrado nas etapas anteriores. O estado de tensões está representado na figura (7.35 b). Uma pequena zona de ruptura foi caracterizada no Solo Variegado junto à parede da escavação, uns 3.0 m acima do nível de fundo.

O campo de deslocamentos finais obtido uma vez concluída a quarta fase da escavação está indicado na figura (7.36 a). Pode ser observado que o prédio adjacente ao Poço Salas Técnicas não evidenciou recalques significativos nesta análise, já que os deslocamentos verticais obtidos no nível de fundação desta edificação foram muito pequenos. O campo de tensões finais é representado na figura (7.36 b). A elevada carga suportada pelo último nível de estroncas provoca a concentração de tensões observada na massa de solo junto a este nível de escoramento. Esta análise mostrou duas zonas de ruptura: uma pequena região localizada junto à parede da escavação e uma segunda zona que caracterizou a ruptura de fundo nesta fase do problema. Porém, esta última não comprometeu a estabilidade geral da estrutura. A posterior concretagem do lastro para estabilização do fundo

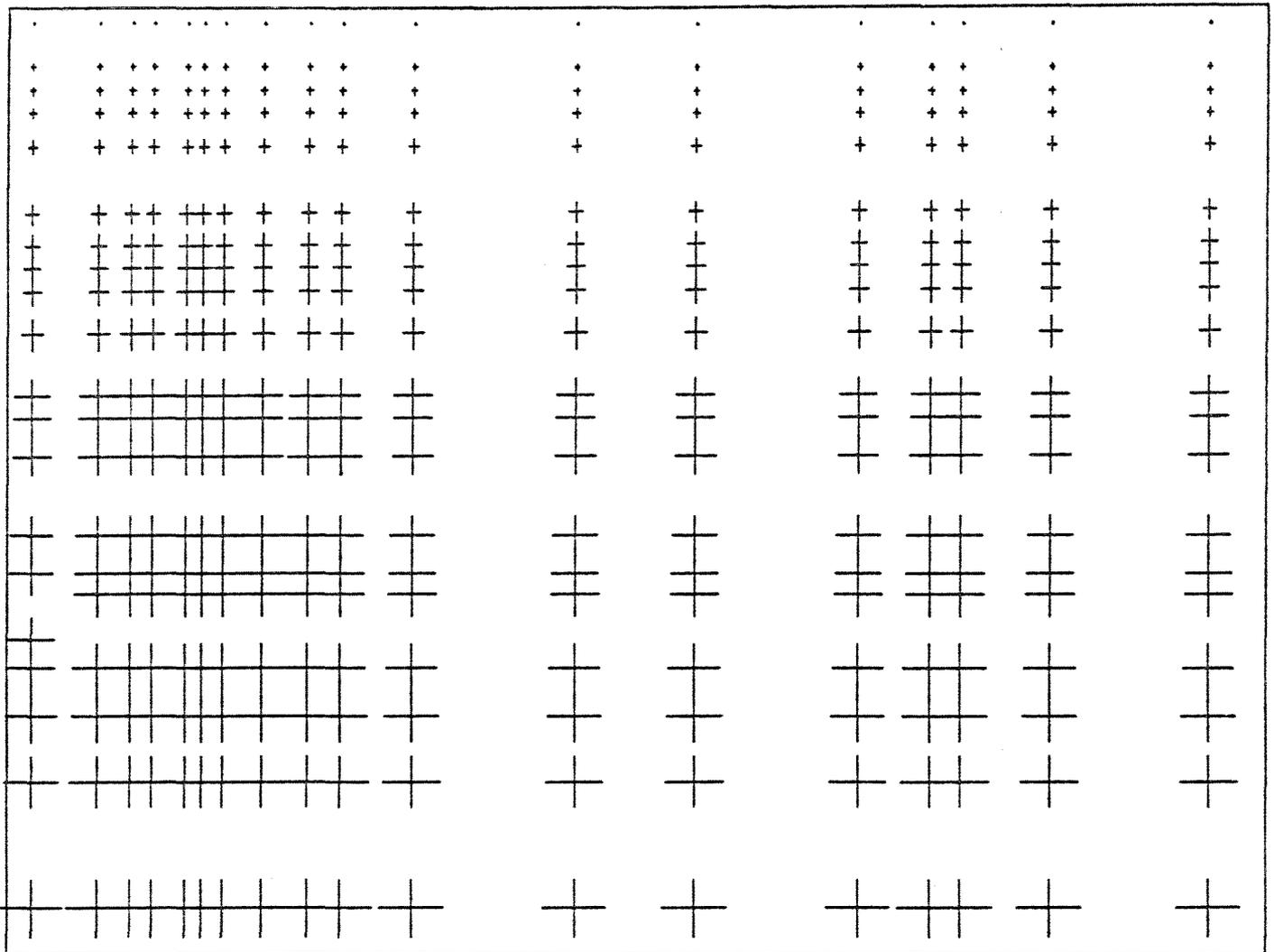
da escavação não foi simulada nesta análise.

O fator de segurança à ruptura  $FS'$  definido no capítulo 6 como:

$$FS' = \eta_1 / f_{p_{final}} \quad (6.4)$$

permite uma melhor interpretação da estabilidade da estrutura analisada. O valor do fator  $FS'$  varia entre 1.0, magnitude correspondente aos pontos que atingiram o estado de ruptura do material ( $f_{p_{final}} = \eta_1$ ), e infinito, valor que representa os pontos localizados no eixo hidrostático de tensões ( $f_{p_{final}} = 0.0$ ).

A figura (7.37) apresenta as curvas representativas dos pontos correspondentes a um mesmo valor do fator  $FS'$ . Pode aqui ser visualizada uma pequena região de ruptura junto à parede de contenção. Esta região, onde o material atingiu um estado ativo de ruptura, se encontra em correspondência com o maior deslocamento horizontal observado na estrutura de suporte. No fundo da escavação foi caracterizada a região de ruptura indicada na figura com um fator  $FS' = cte = 1.0$ . Porém, uma região com rigidez praticamente nula ( $FS' = 1.05$ ) pode ser observada, ficando caracterizada a ruptura de fundo da escavação. Pode também ser apreciada a região de estabilização definida pela ação das estroscas, principalmente do último nível de escoramento, onde o elevado valor da força aplicada definiu o bulbo caracterizado por um elevado valor de  $FS'$ . Os pontos embaixo da escavação dos subsolos adjacentes às Salas Técnicas foram também levados a estados de tensões próximos do eixo hidrostático.

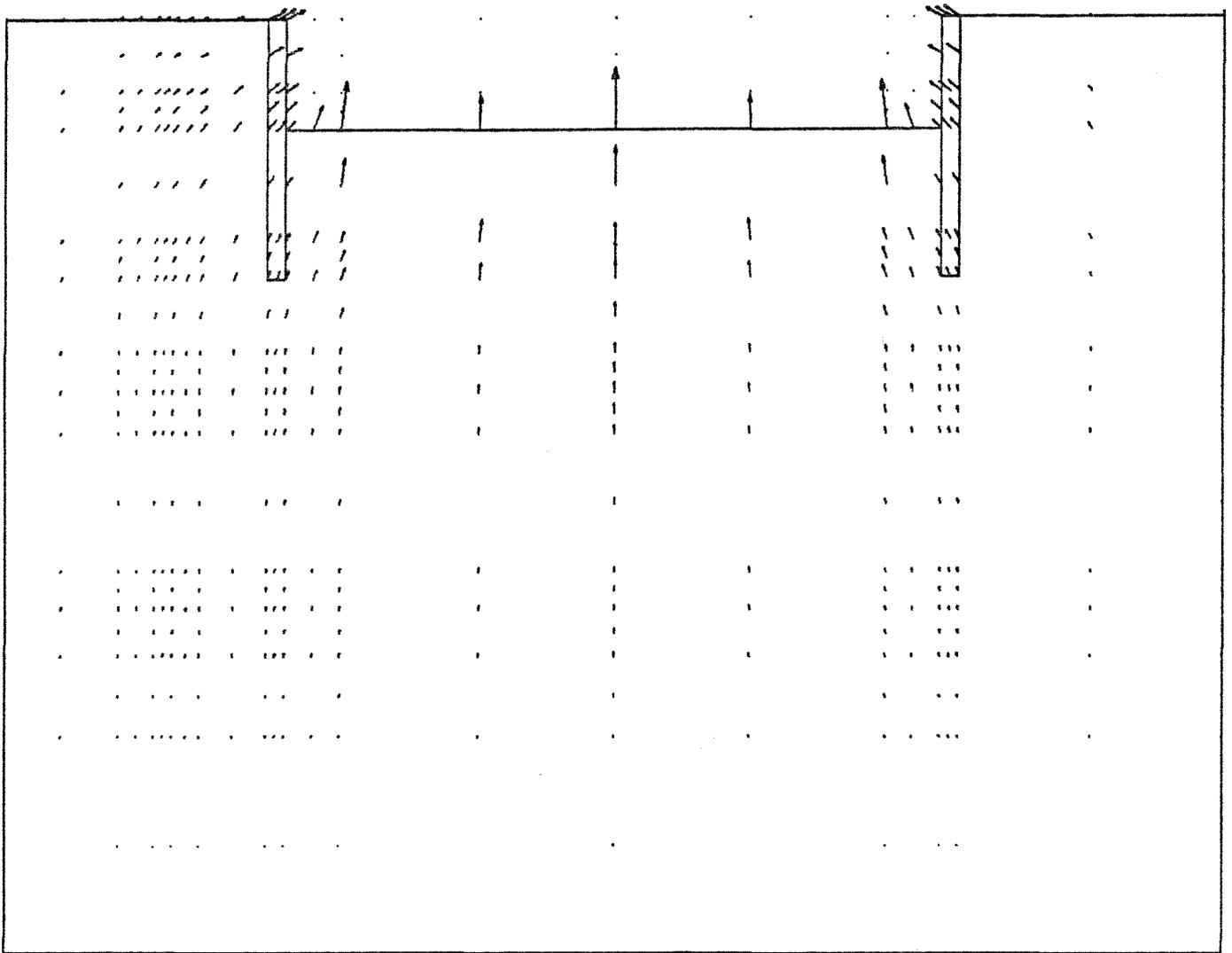


### ESCALAS

GEOMETRIA: — = 2.0 m

TENSÕES : — = 1 MPa

Fig. 7.29 - Estado inicial de tensões

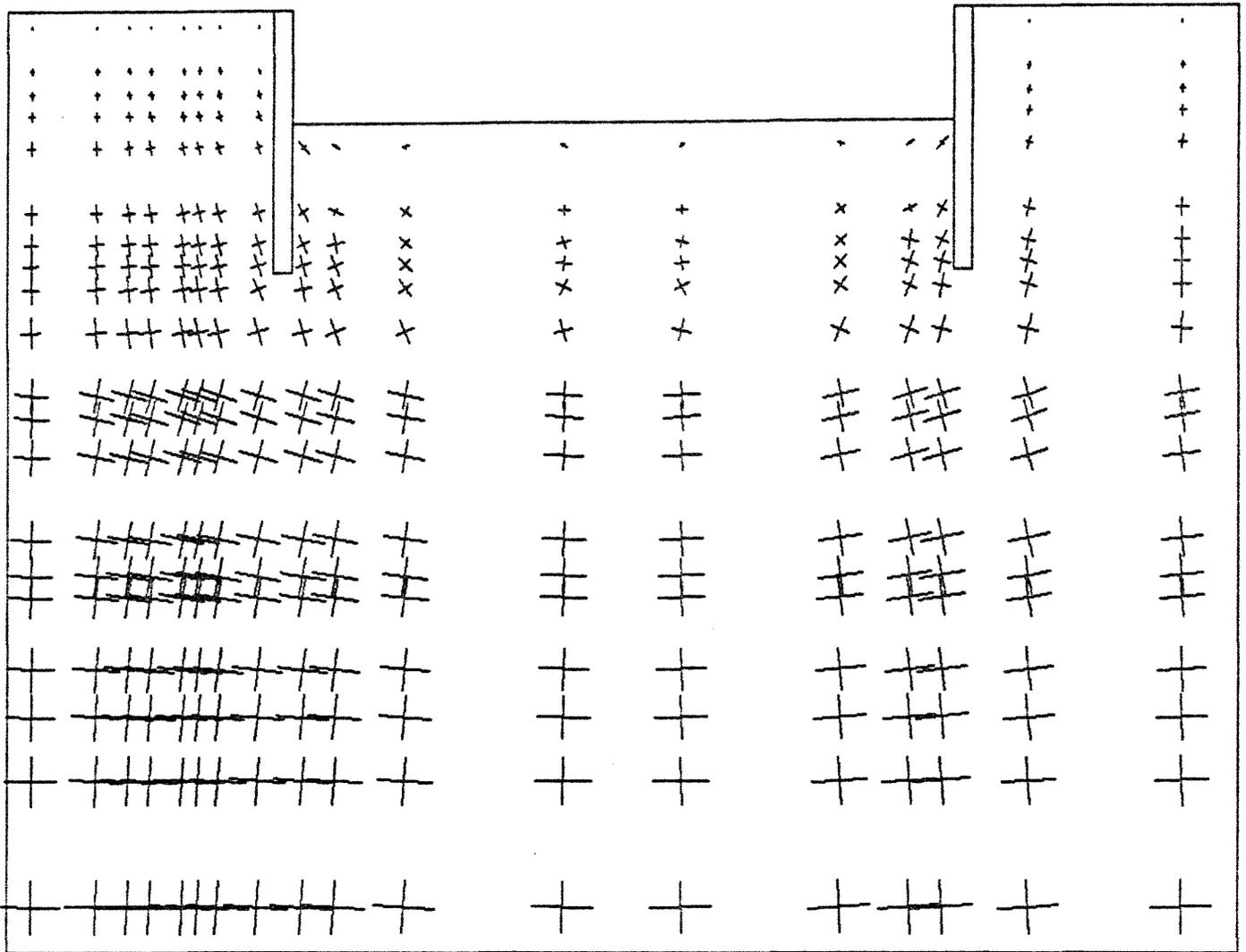


## ESCALAS

GEOMETRIA: — = 2.0 m

DESLOCAM.: - = 1.0 cm

Fig. 7.30 - a) Campo de deslocamentos obtido após a escavação dos subsolos do prédio adjacente

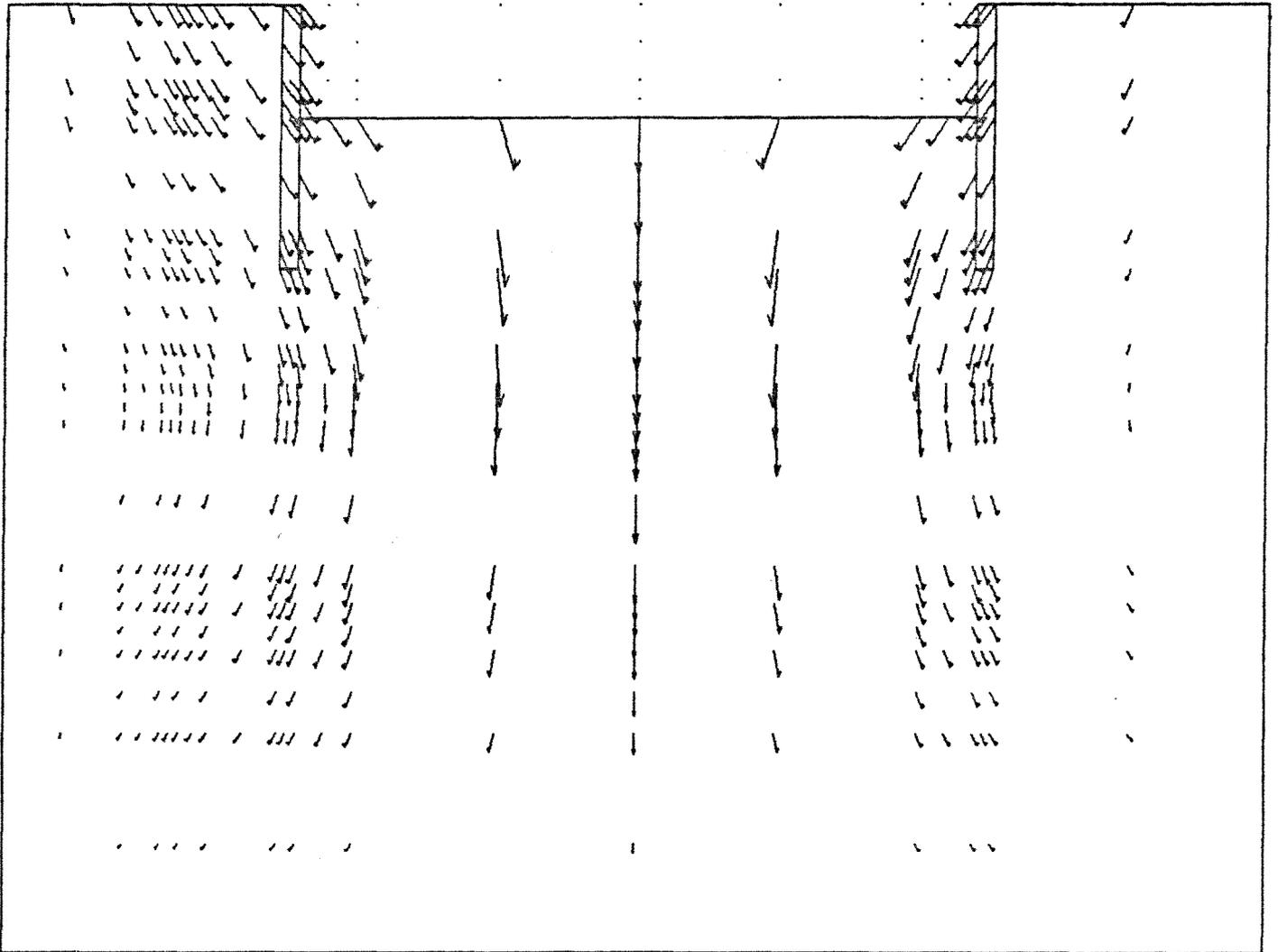


## ESCALAS

GEOMETRIA: — = 2.0 m

TENSÕES : — = 1 MPa

Fig. 7.30 - b) Estado de tensões obtido após a escavação dos subsolos do prédio adjacente

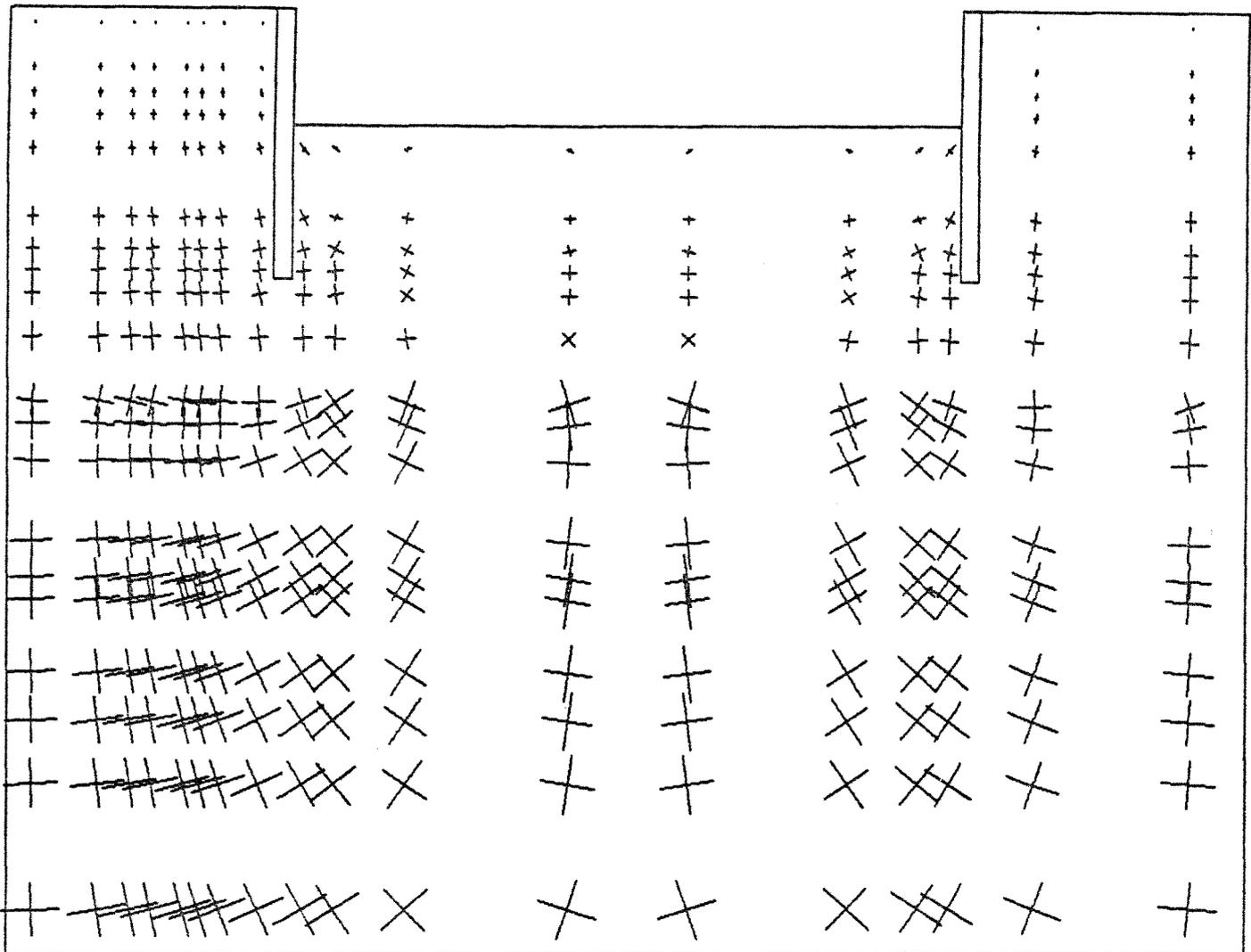


## ESCALAS

GEOMETRIA: — = 2.0 m

DESLOCAM.: - = 1.0 cm

Fig. 7.31 - a) Campo de deslocamentos obtido após a fundação do prédio adjacente

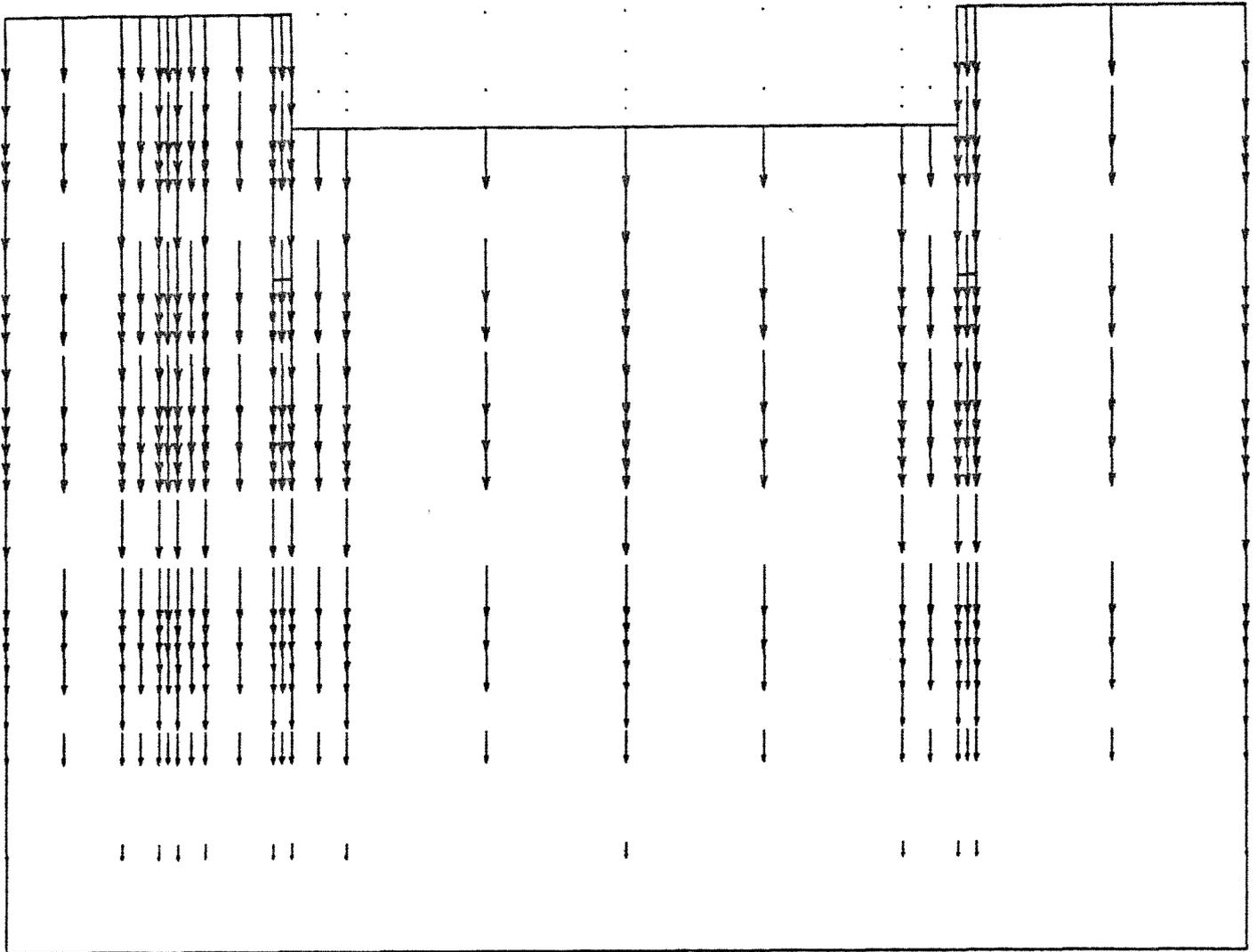


## ESCALAS

GEOMETRIA: — = 2.0 m

TENSÕES : — = 1 MPa

Fig. 7.31 - b) Estado de tensões obtido após a fundação do prédio adjacente

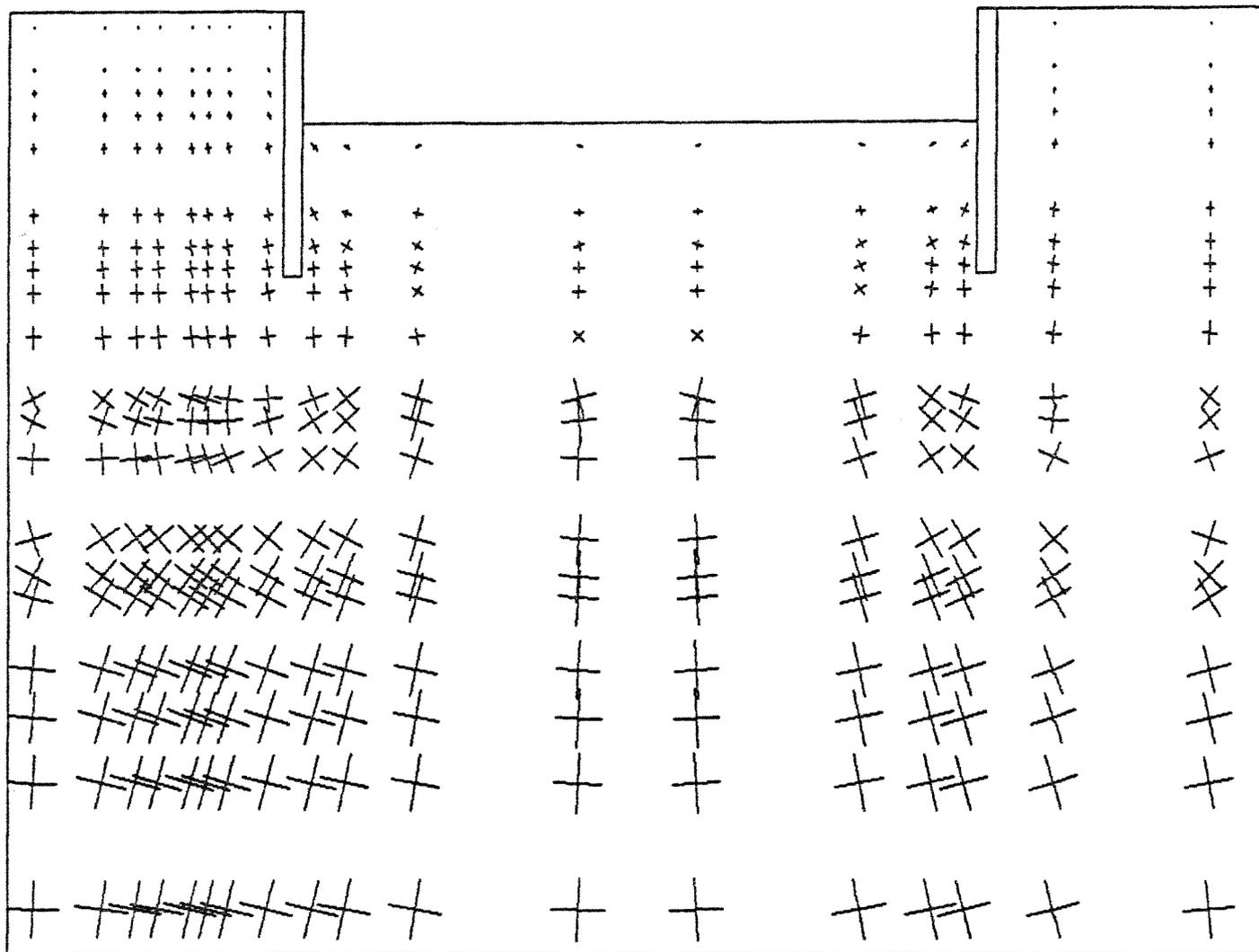


### ESCALAS

GEOMETRIA: — = 2.0 m

DESLOCAM.: — = 1.0 cm

Fig. 7.32 - a) Campo de deslocamentos obtido após o rebaixamento do lençol freático

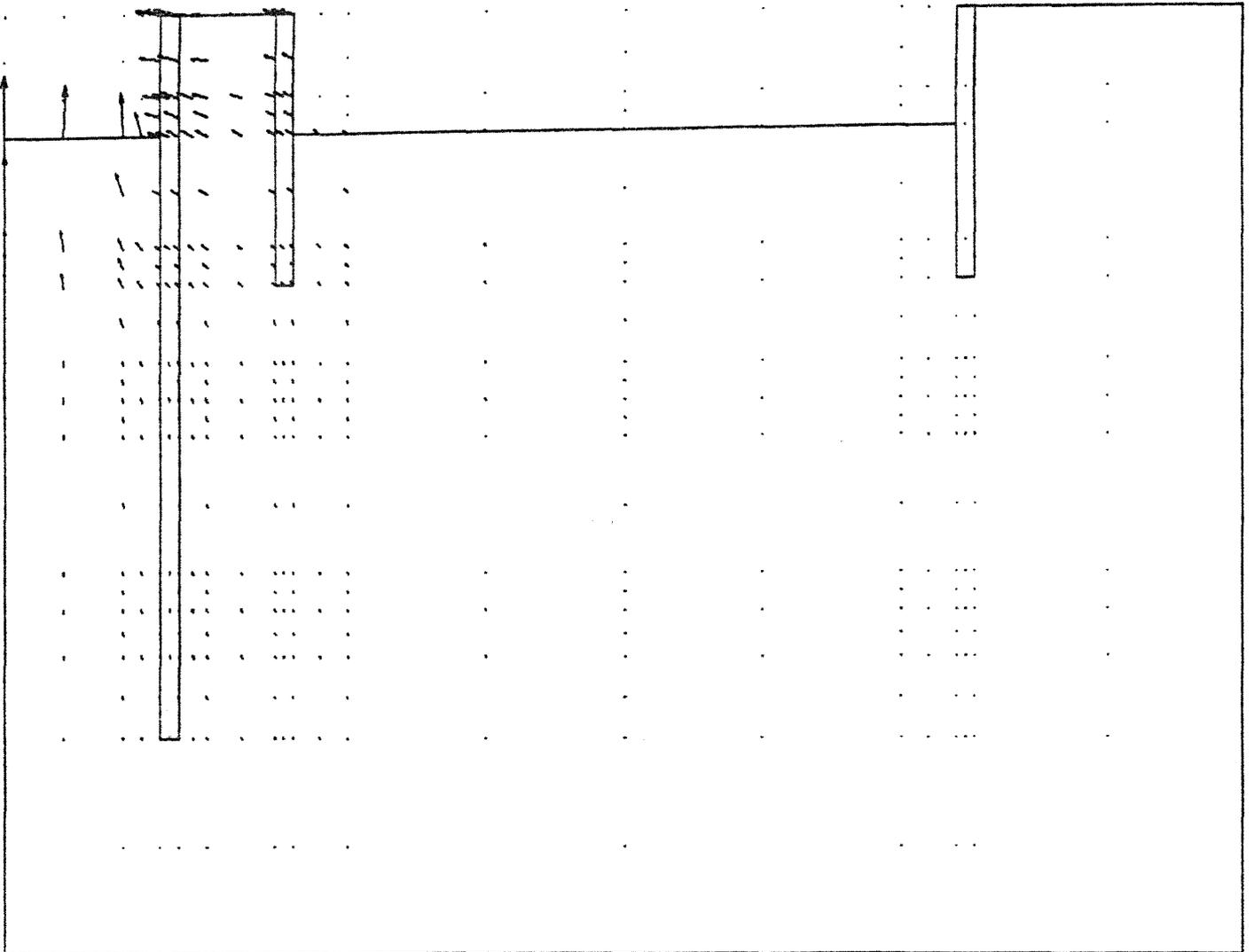


## ESCALAS

GEOMETRIA: — = 2.0 m

TENSÕES : — = 1 MPa

Fig. 7.32 - b) Estado de tensões obtido após o rebaixamento do lençol freático

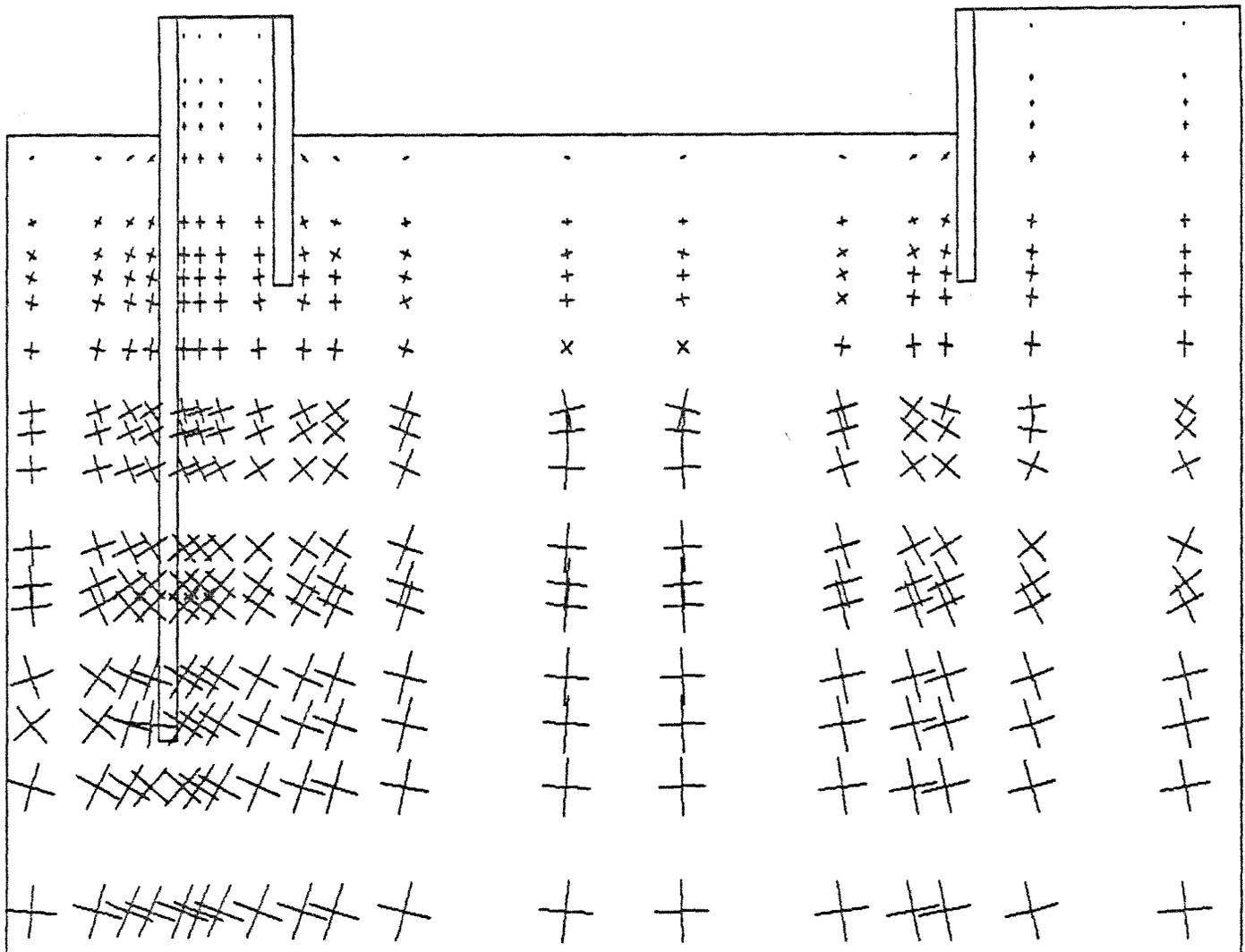


## ESCALAS

GEOMETRIA: — = 2.0 m

DESLOCAM.: - = 1.0 cm

Fig. 7.33 - a) Campo de deslocamentos obtido após a primeira fase da escavação do Poço Salas Técnicas

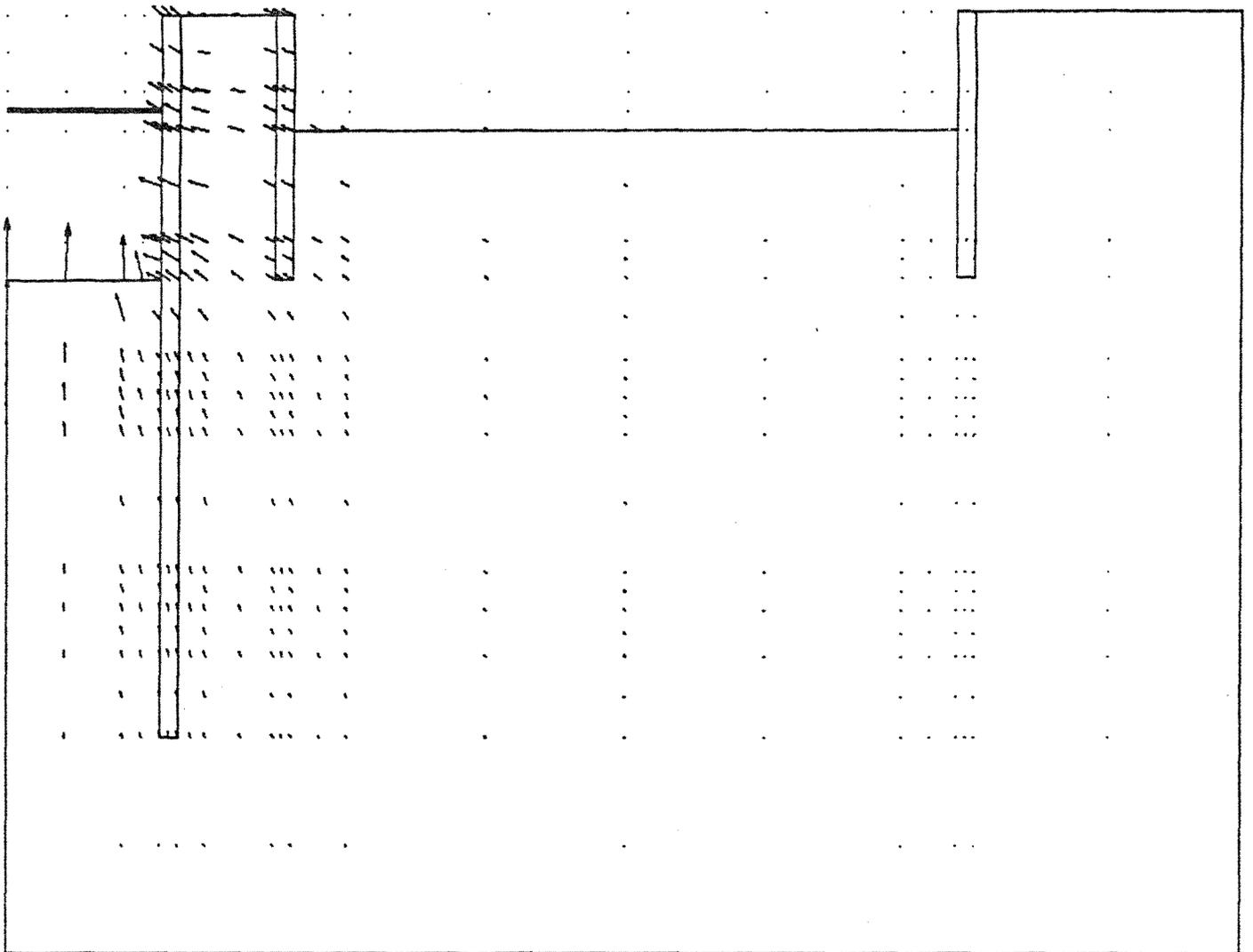


## ESCALAS

GEOMETRIA: — = 2.0 m

TENSÕES : — = 1 MPa

Fig. 7.33 - b) Estado de tensões obtido após a primeira fase da escavação do Poço Salas Técnicas

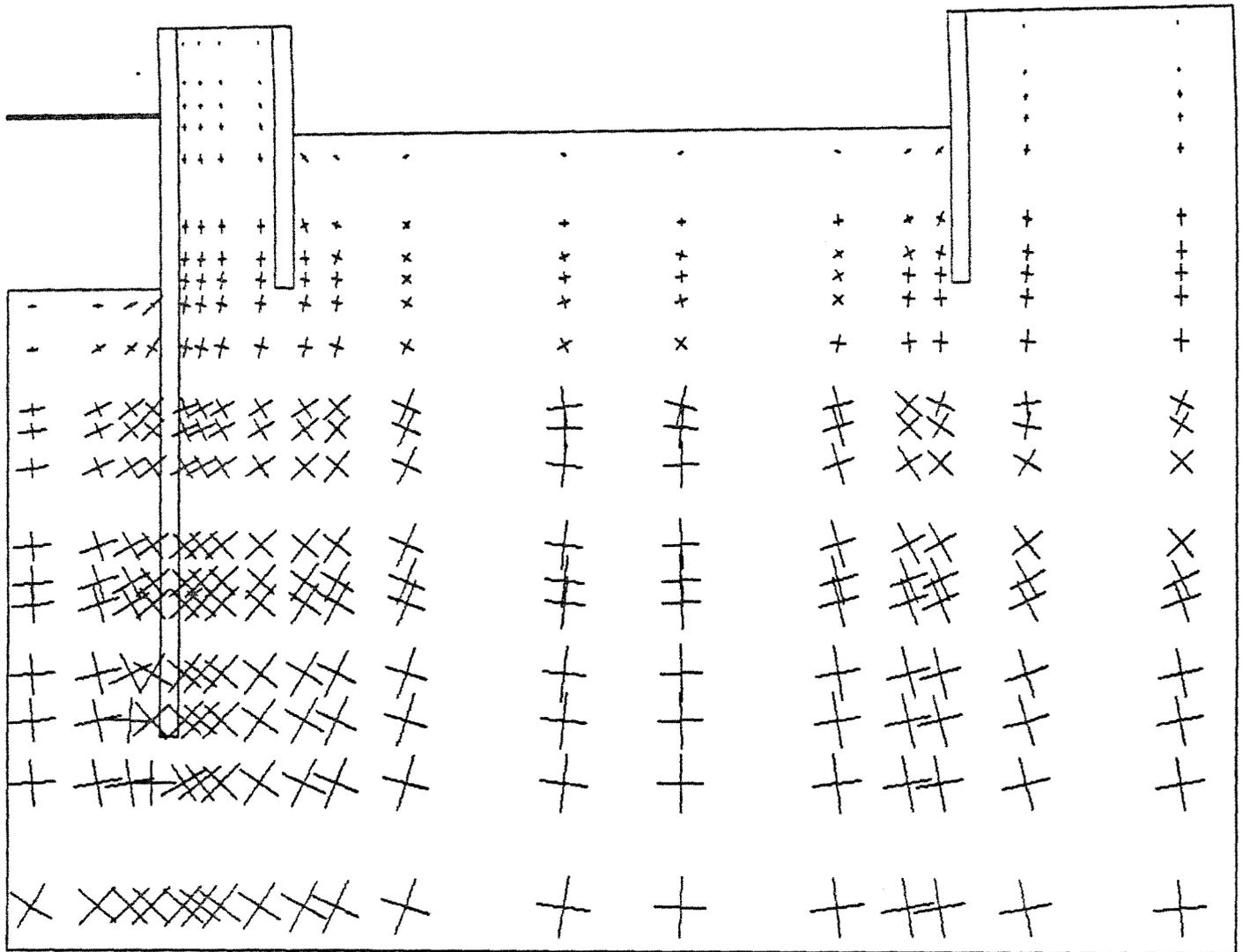


## ESCALAS

GEOMETRIA: — = 2.0 m

DESLOCAM.: - = 1.0 cm

Fig. 7.34 - a) Campo de deslocamentos obtido após a segunda fase da escavação do Poço Salas Técnicas

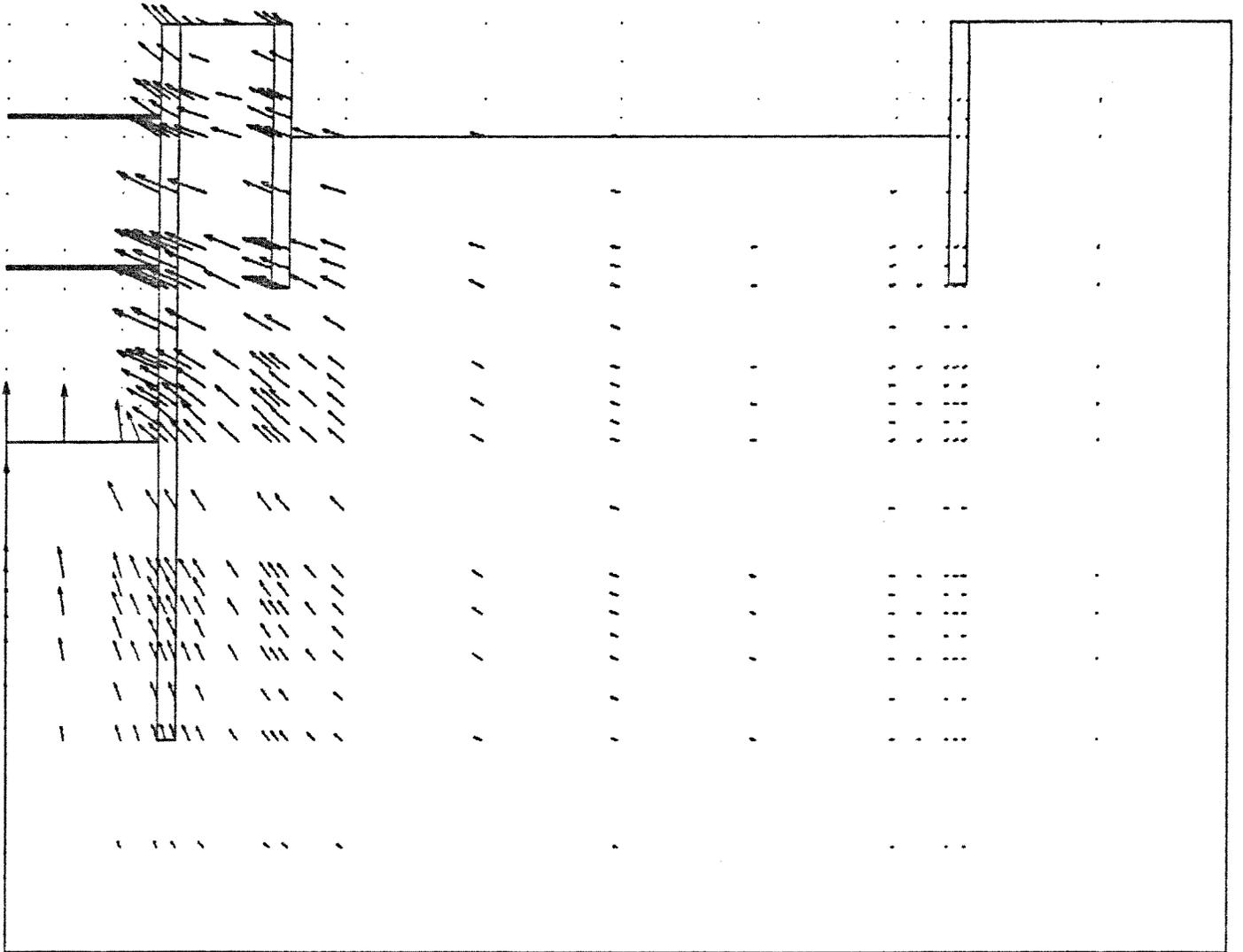


### ESCALAS

GEOMETRIA: — = 2.0 m

TENSÕES : — = 1 MPa

Fig. 7.34 - b) Estado de tensões obtido após a segunda fase da escavação do Poço Salas Técnicas

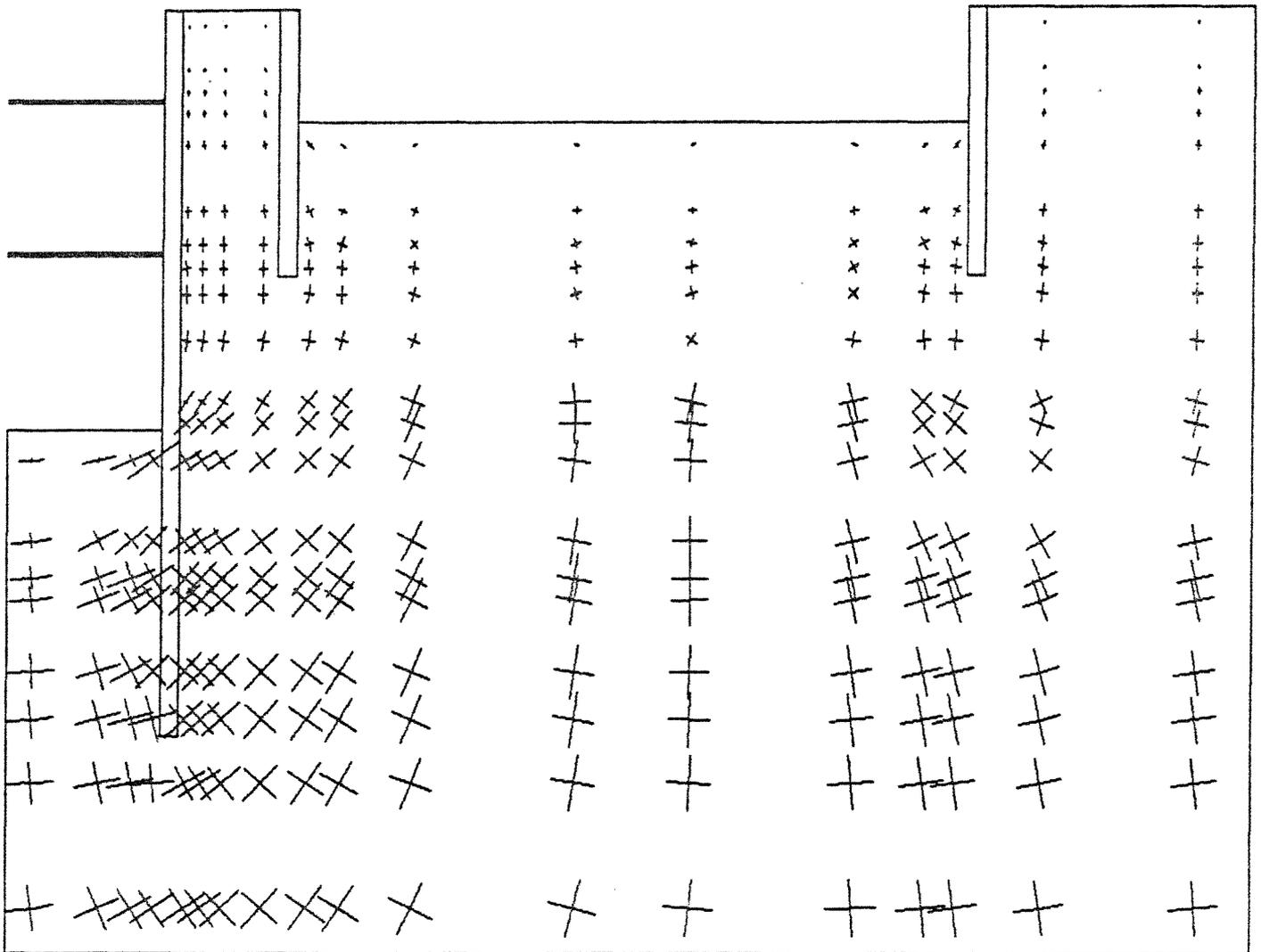


## ESCALAS

GEOMETRIA: — = 2.0 m

DESLOCAM.: - = 1.0 cm

Fig. 7.35 - a) Campo de deslocamentos obtido após a terceira fase da escavação do Poço Salas Técnicas

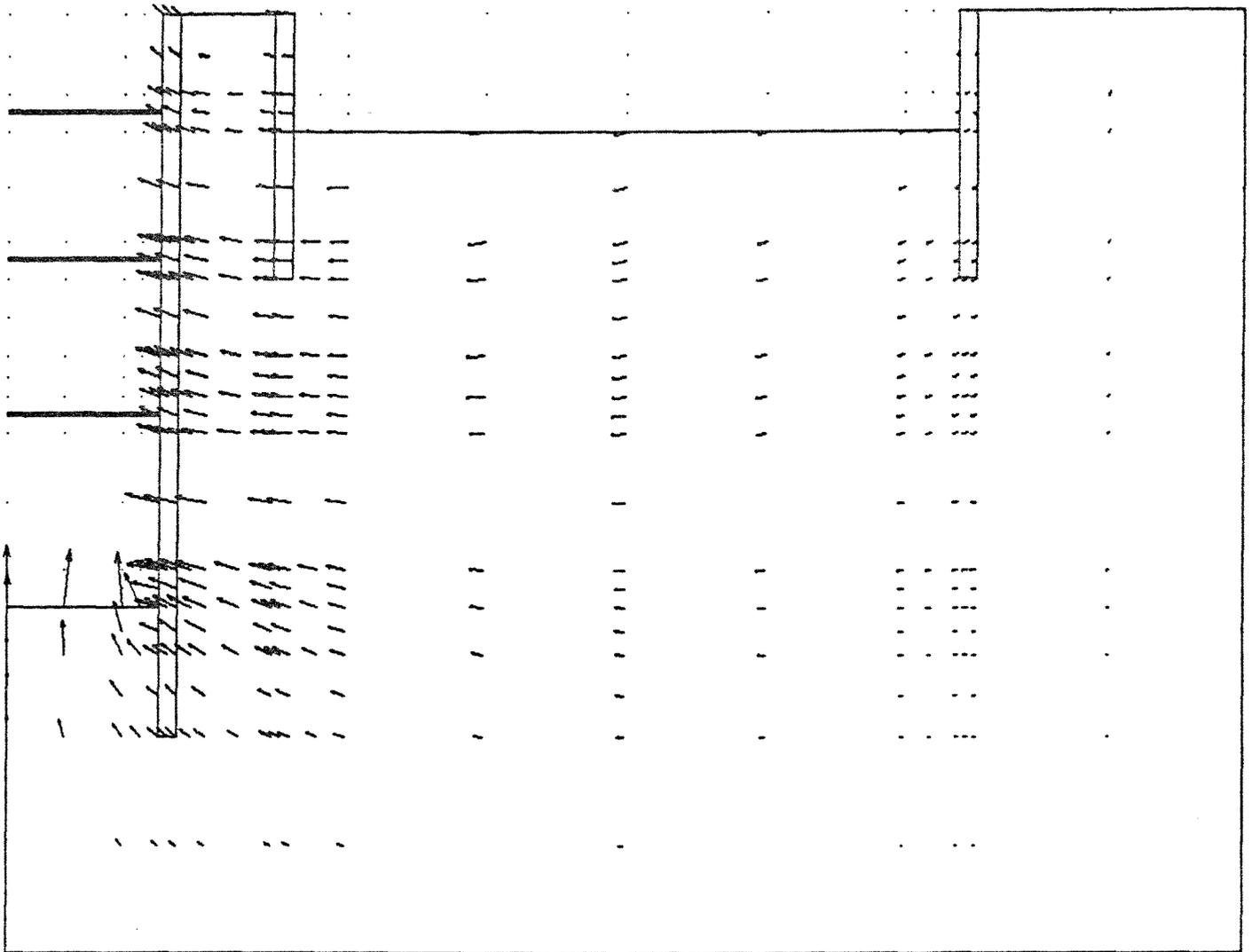


### ESCALAS

GEOMETRIA: — = 2.0 m

TENSÕES : — = 1 MPa

Fig. 7.35 - b) Estado de tensões obtido após a terceira fase da escavação do Poço Salas Técnicas

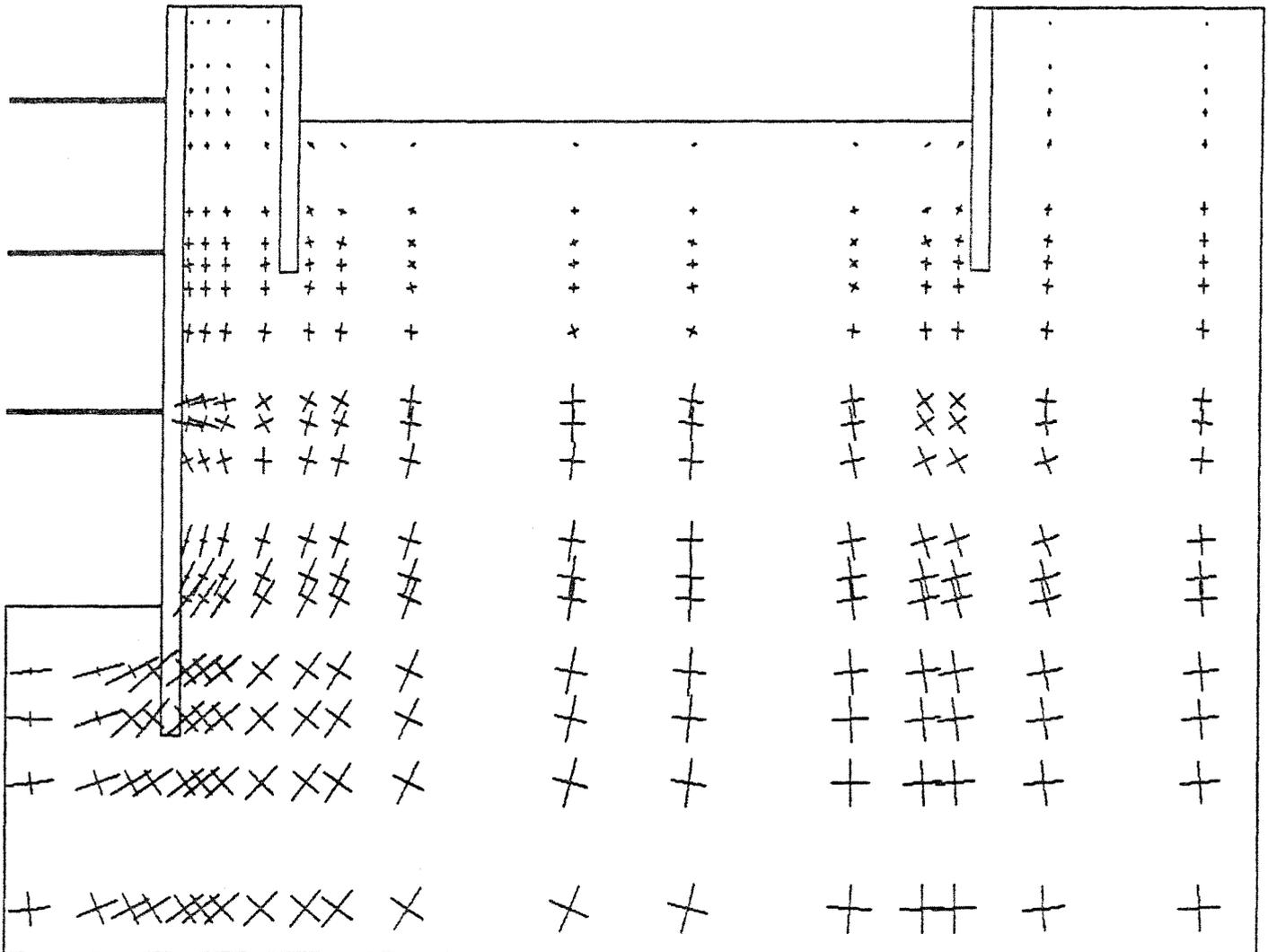


## ESCALAS

GEOMETRIA: — = 2.0 m

DESLOCAM.: - = 1.0 cm

Fig. 7.36 - a) Campo de deslocamentos obtido após a quarta fase da escavação do Poço Salas Técnicas



## ESCALAS

GEOMETRIA: — = 2.0 m

TENSÕES : — = 1 MPa

Fig. 7.36 - b) Estado de tensões obtido após a quarta fase da escavação do Poço Salas Técnicas

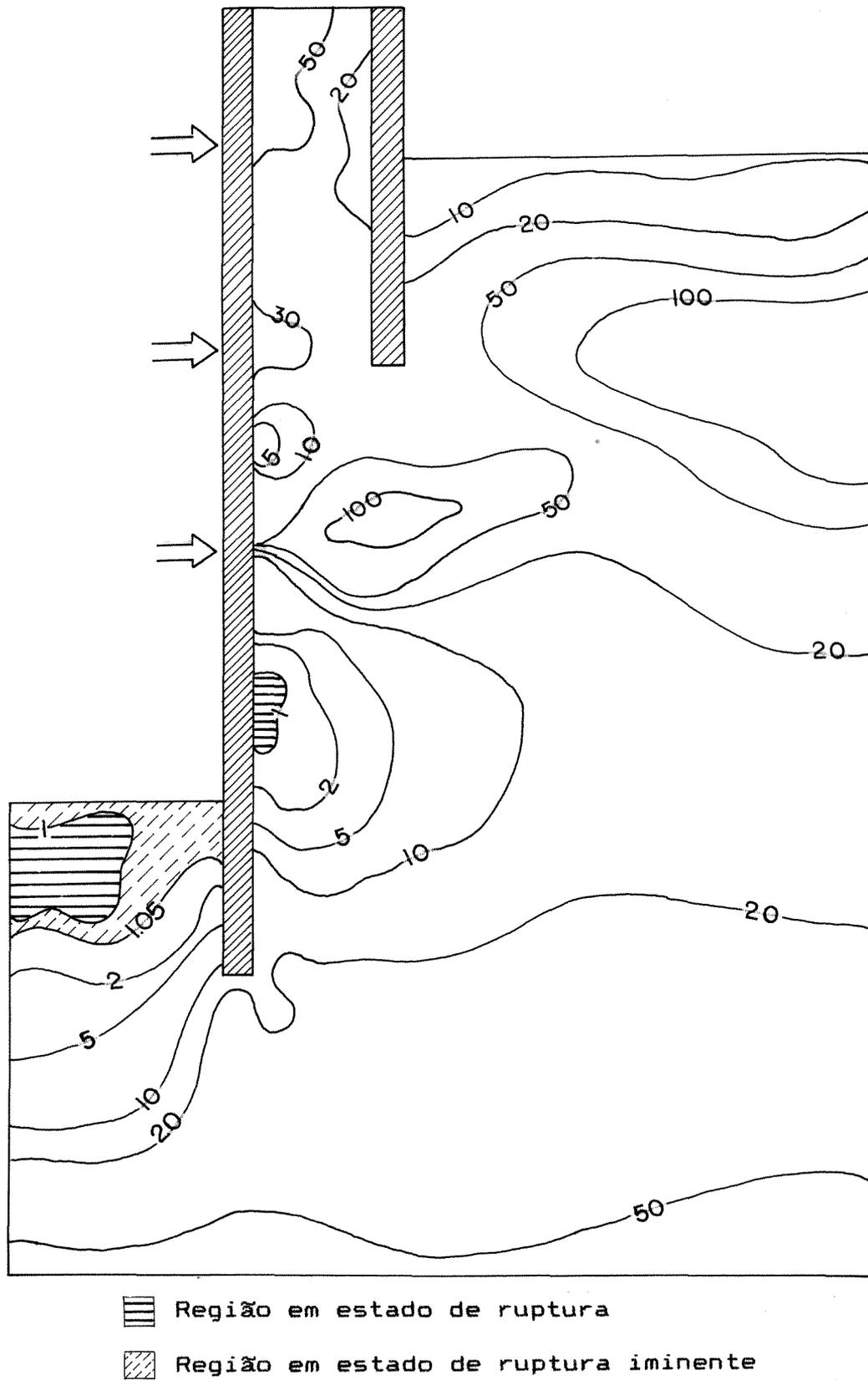


Fig. 7.37 - Pontos caracterizados por um mesmo valor de  $FS'$

### 7.5.2 Análise do Comportamento da Estrutura de Suporte

A figura (7.38) ilustra a evolução dos deslocamentos horizontais da parede ao longo das quatro fases construtivas. Os movimentos referentes a cada fase, estão representados conjuntamente com as fases anteriores para melhor evidenciar a evolução dos mesmos. A primeira fase, correspondente à escavação até a cota 813.0 m, consiste numa fase auto-portante na qual foram obtidos deslocamentos crescentes da base ao topo da parede da estrutura de suporte (figura 7.38 a). A colocação dos primeiros dois níveis de estroncas, instalados com o progresso da escavação até os níveis 803.0 m e 795.0 m, modifica gradualmente o movimento da parede, passando a ter um aspecto que é típico nas estruturas escoradas (figuras 7.38 b e 7.38 c). O deslocamento final da estrutura (figura 7.38 d) observado após a colocação do último nível de estroncas e a escavação até o nível de fundo (785.6 m), se encontra altamente influenciado pela elevada força exercida por este último nível de escoramento. O deslocamento horizontal máximo observado (3.69 cm) coincide com a formação, na massa de solo, da região localizada de ruptura representada na figura (7.37).

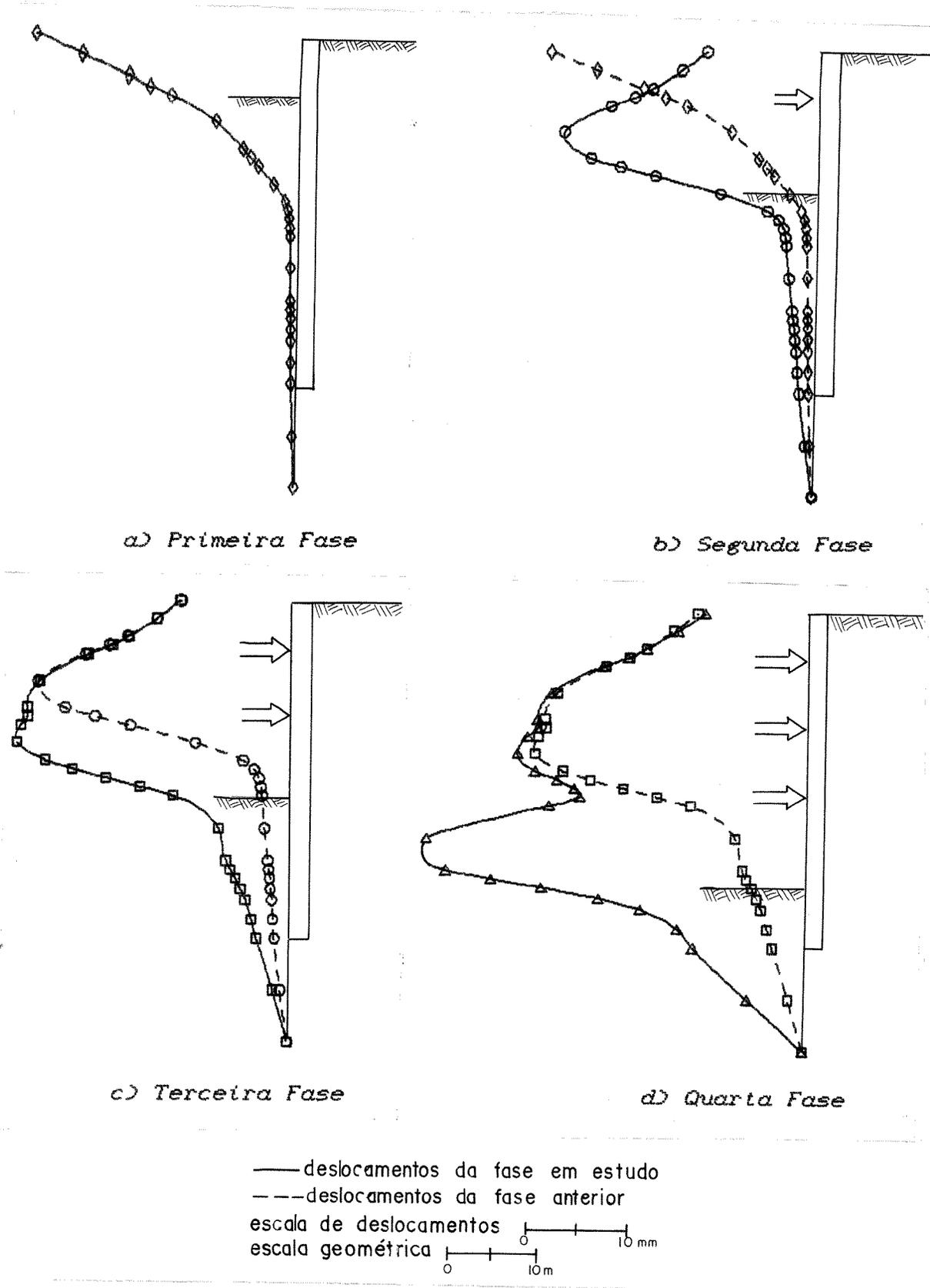


Fig. 7.38 - Evolução dos deslocamentos durante a escavação do Poço Salas Técnicas

Os esforços mobilizados no escoramento constam da figura (7.39) onde estão representados os resultados obtidos nesta análise para os três níveis de estroncas do problema. Os valores aqui obtidos correspondem à componente da força, por unidade de comprimento longitudinal, perpendicular ao plano da análise. Os valores máximos e mínimos registrados na última fase correspondem a  $2142.9 \text{ KN}$  e  $278.2 \text{ KN}$  por metro longitudinal.

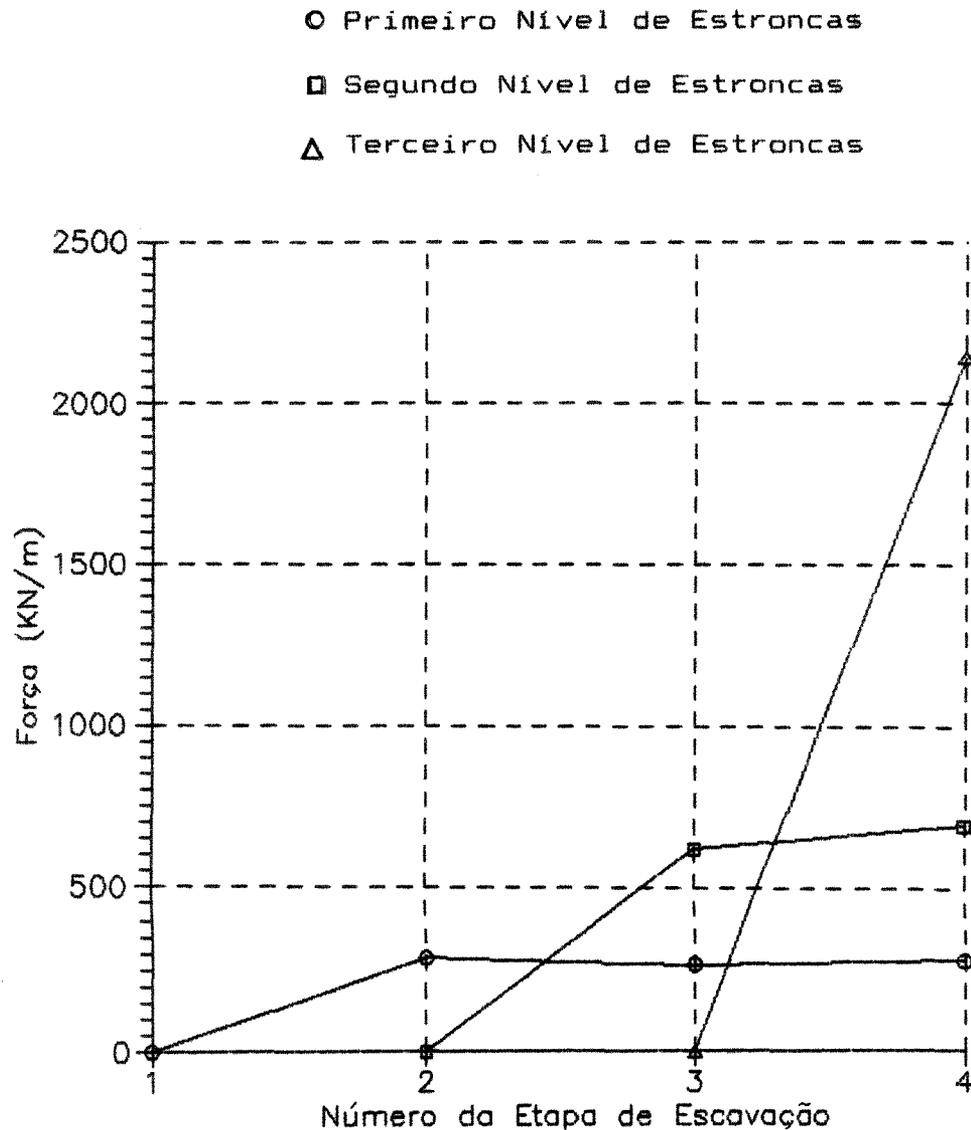


Fig. 7.39 - Forças exercidas pelo escoramento

Foram obtidos os valores da componente horizontal de tensões exercida sobre a parede da estrutura de suporte do Poço Salas Técnicas. A figura (7.40) mostra os valores desta componente horizontal de tensões na vertical correspondente à posição da futura parede durante as etapas da análise anteriores ao início da obra. A figura (7.41) mostra os valores do empuxo exercido pela massa de solo adjacente sobre a parede da estrutura em cada uma das fases de escavação do Poço Salas Técnicas.

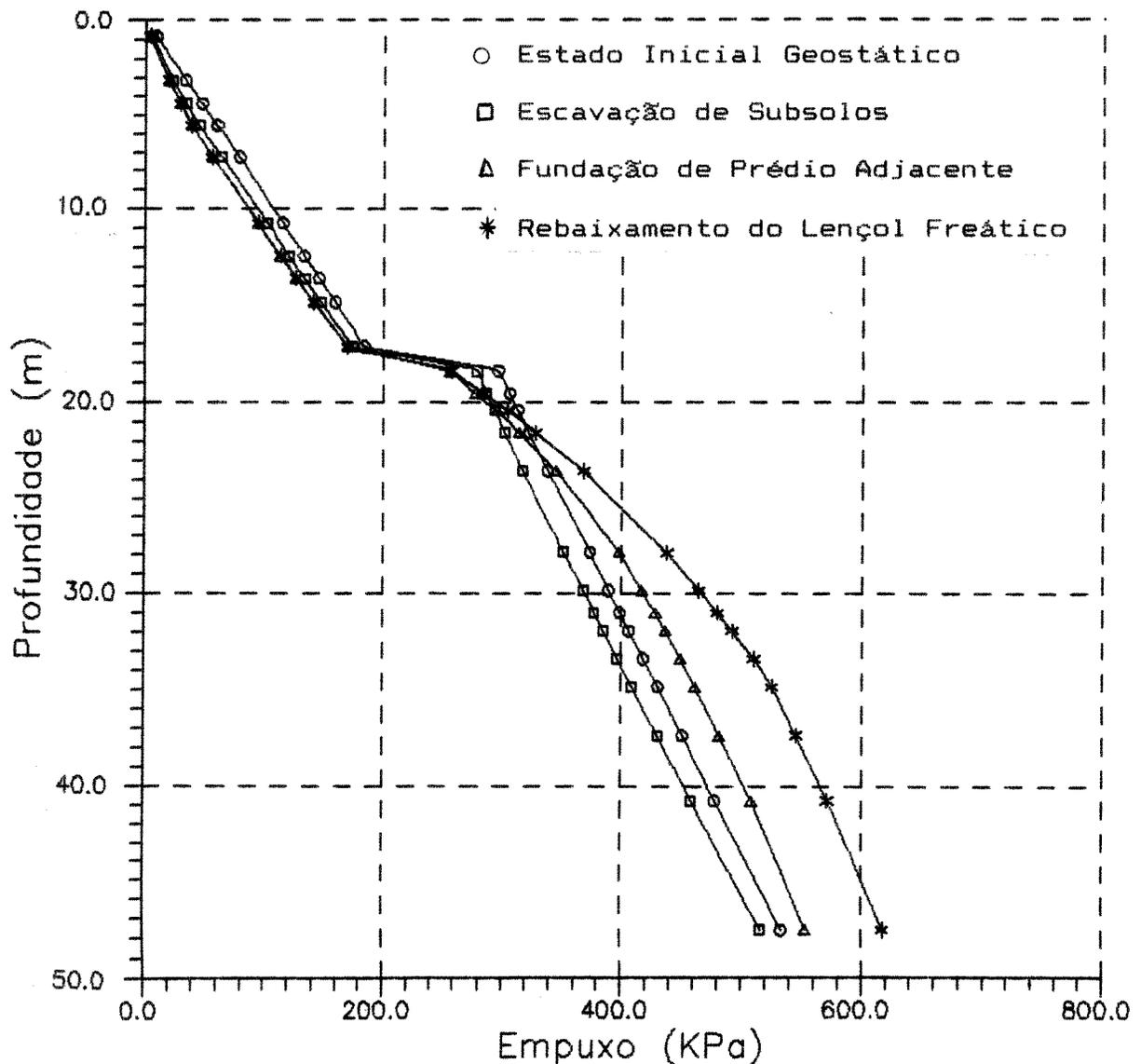


Fig. 7.40 - Componente horizontal de tensões nas etapas anteriores à escavação do Poço Salas Técnicas

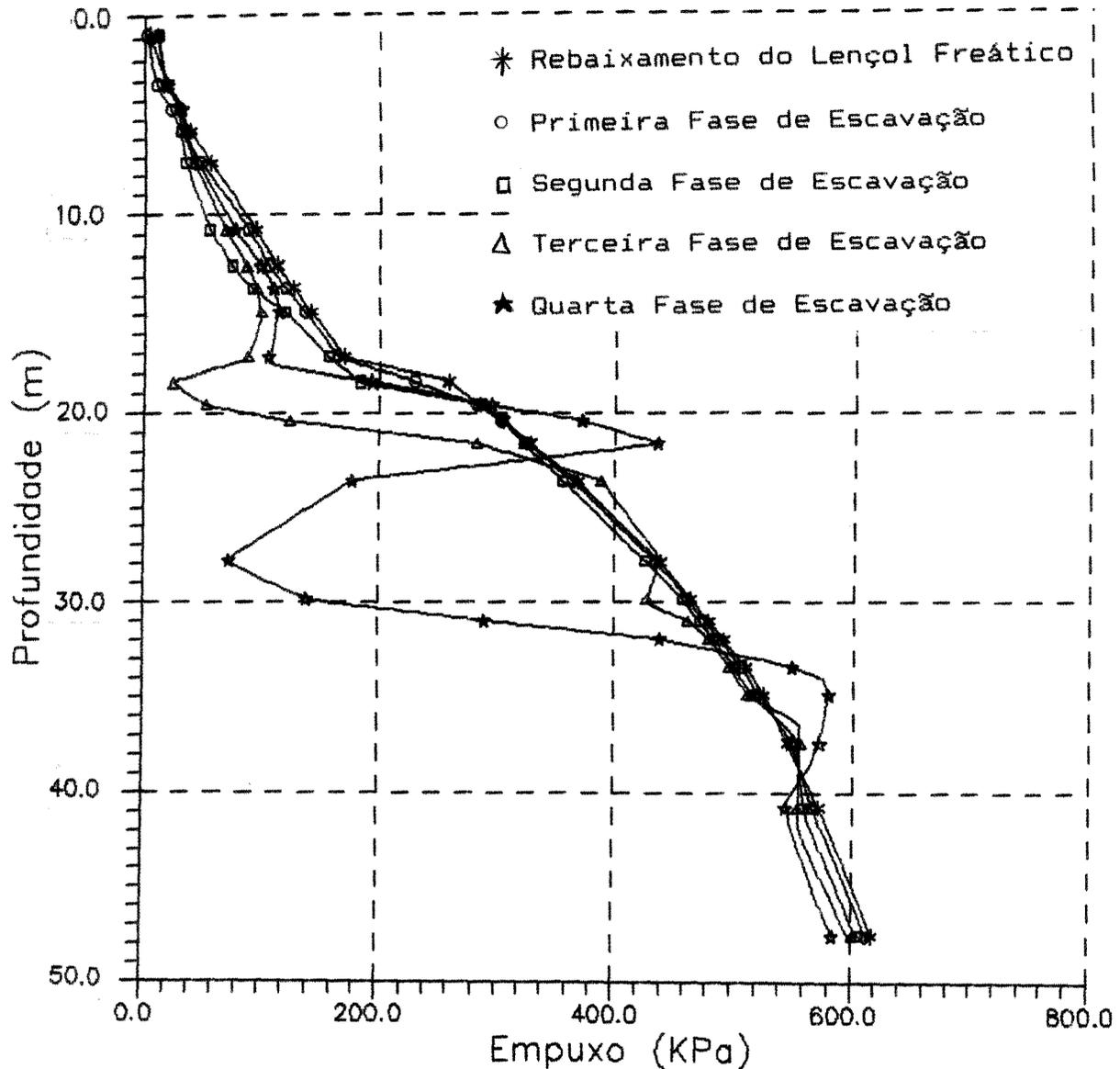


Fig. 7.41 - Empuxo exercido sobre a estrutura de suporte ao longo da escavação do Poço Salas Técnicas

Os diagramas de esforço cortante e momentos fletores originados na parede de contenção na última fase da escavação em estudo estão apresentados nas figuras (7.42 a) e (7.42 b). A rigor, para o projeto interessam os valores máximos destes esforços a que cada seção da estrutura de suporte é submetida ao longo do processo. Assim, as figuras (7.43 a) e (7.43 b) mostram as envoltórias dos diagramas de esforço cortante e momento fletor correspondentes às diferentes etapas do cálculo

desenvolvidos na análise. Na envoltória de momentos fletores observa-se um predomínio de momentos negativos.

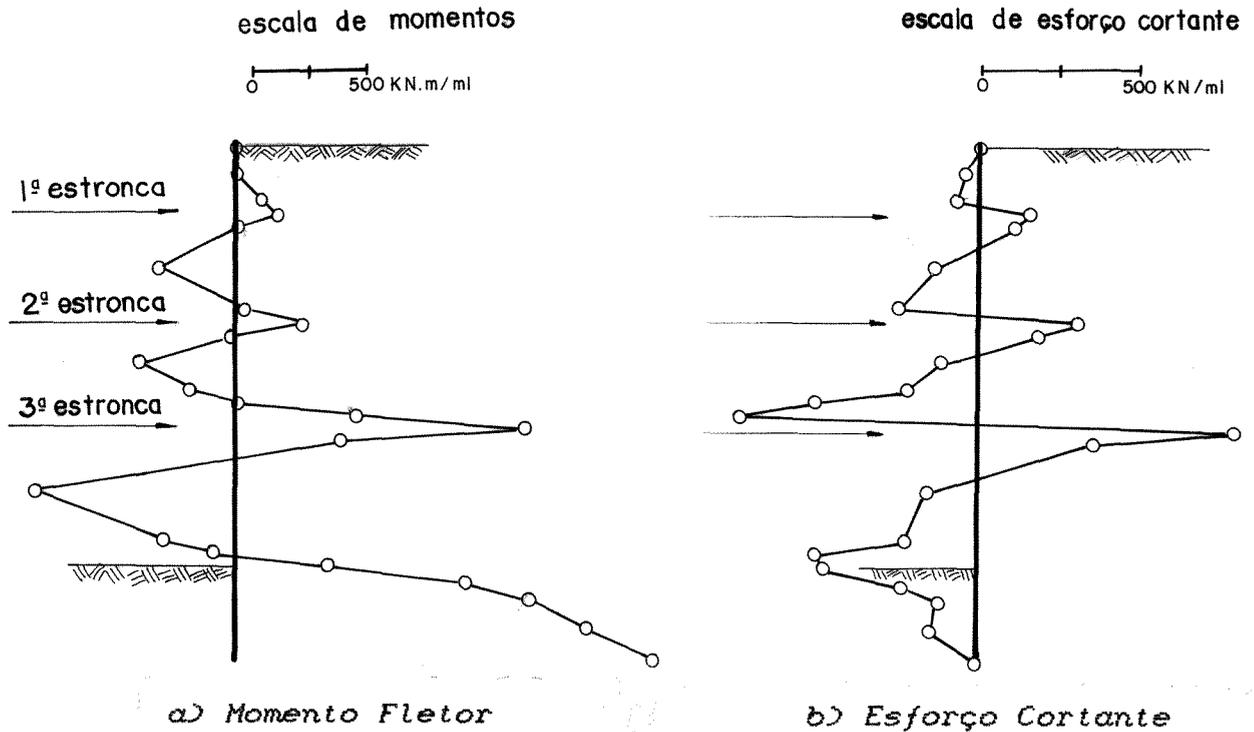


Fig. 7.42 - Esforços exercidos sobre a estrutura de suporte na última fase de escavação

### 7.5.3 Considerações Finais

Como já foi mencionado, os resultados aqui apresentados correspondem à análise desenvolvida utilizando o Método de Newton-Raphson Standard e considerando a matriz de rigidez não-simétrica para resolver a não-linearidade do problema.

Cada um dos dois perfis onde se encontra armazenada a matriz de rigidez precisou de 47540 posições na primeira etapa do problema em estudo, sendo que o vetor de trabalho total do

problema requereu a alocação dinâmica de 109195 valores. A necessidade de memória diminui nas etapas posteriores por causa da eliminação de graus de liberdade da malha como consequência dos processos de escavação.

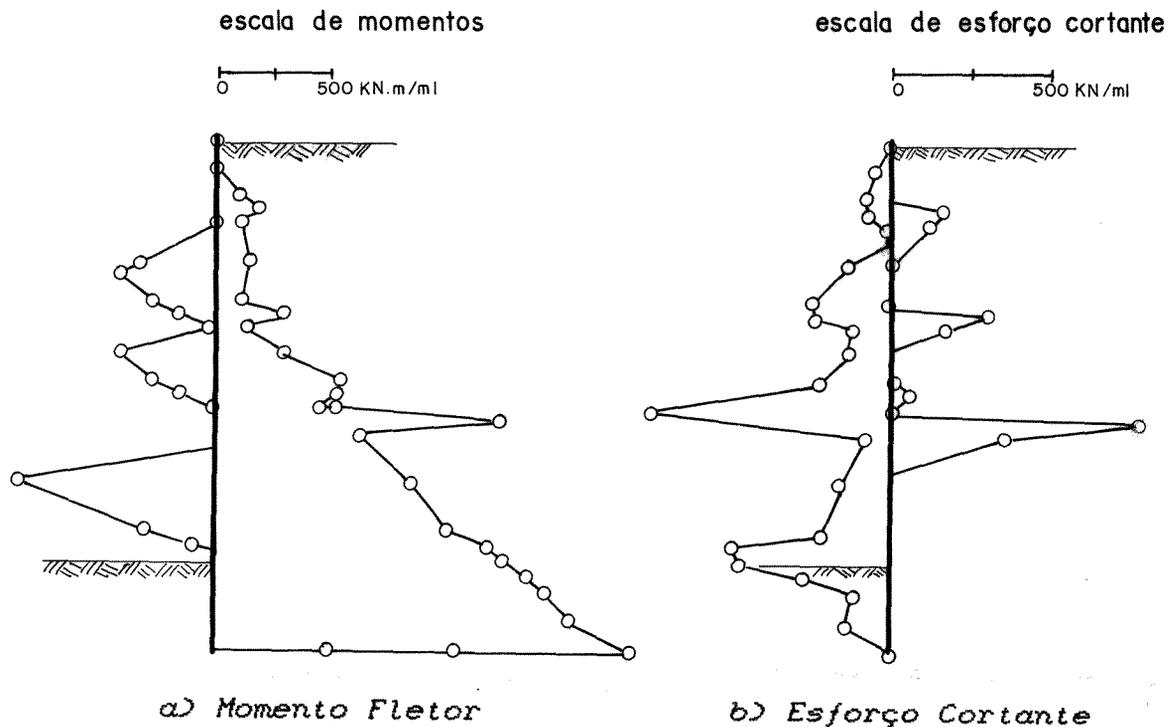


Fig. 7.43 - Envoltória dos esforços exercidos sobre a estrutura de suporte

O processamento desta análise foi efetuado num Computador Central CDC Cyber 170-835. Os tempos consumidos no desenvolvimento das diferentes etapas efetuadas, utilizando o processo de segmentação do código do programa, estão indicados na tabela (7.3).

Tabela 7.3

*Tempos consumidos no processamento da análise*

Etapa	Tempo de Processam.
Estado Geost. + Escav. Subsolos	395.12 s.CPU
Fundação Prédio Adjacente	224.57 s.CPU
Rebaixamento Lençol Freático	179.36 s.CPU
1a. Fase Salas Técnicas	316.21 s.CPU
2a. Fase Salas Técnicas	329.78 s.CPU
3a. Fase Salas Técnicas	330.61 s.CPU
4a. Fase Salas Técnicas	2648.06 s.CPU

O elevado tempo de processamento da última fase da escavação originou-se por causa do aumento no número de iterações necessárias pelo fato de ter se configurado uma zona de ruptura no fundo da escavação.

O problema foi também analisado considerando a simetrização da matriz de rigidez do problema através da utilização da matriz constitutiva simétrica média (seção 4.2.2). Neste caso, um único perfil de 47540 posições precisou ser armazenado para definir a matriz de rigidez com o que o tamanho do vetor de trabalho caiu para 61655 valores. Em problemas tais como o aqui desenvolvido, onde a capacidade de memória do equipamento é um sério condicionante da análise, a utilização de técnicas de simetrização se torna bastante vantajosa. Os resultados obtidos nesta segunda análise foram muito próximos dos valores definidos no estudo não-simétrico. O

tempo de processamento foi da mesma ordem de grandeza que o consumido na primeira análise, já que o maior número de iterações necessárias neste caso foi compensado aproximadamente pelo menor tempo necessário para efetuar cada uma destas iterações.

## CAPÍTULO 8

### CONCLUSÕES E SUGESTÕES

O objetivo principal deste trabalho consistiu na implementação, verificação e posterior utilização de um modelo de cálculo para a análise de escavações suportadas por estruturas flexíveis. Este modelo de cálculo foi materializado através do programa *ANLOG* aqui desenvolvido que permite a análise pelo método dos elementos finitos de problemas de deformação plana e axissimétricos.

O estudo do comportamento de escavações suportadas torna-se complexo devido à multiplicidade de variáveis envolvidas na interação entre o solo e a estrutura de suporte. Por este motivo, o método dos elementos finitos, que possui a capacidade de permitir uma simulação realista do intrincado comportamento de escavações escoradas, foi escolhido como método de análise.

Apesar deste trabalho ter se restrito à aplicação do programa desenvolvido com relação à análise de escavações a céu aberto, o código implementado possui facilidades que permitem a abordagem de outros tipos de obras geotécnicas tais como escavações subterrâneas, construção de aterros e barragens e obras de fundações.

Os conceitos básicos do método dos elementos finitos e sua utilização na análise de escavações foram inicialmente apresentados, junto com uma revisão da abordagem tradicional de escavações escoradas e de trabalhos que analisaram este tipo de obras utilizando o método numérico aqui referido. Os fundamentos teóricos correspondentes ao modelo elasto-plástico utilizado e às características da abordagem da não-linearidade do problema foram oportunamente indicados, particularizando as metodologias adotadas para a sua implementação no programa desenvolvido. As características deste programa são:

- Utilização do elemento isoparamétrico de oito nós para representar elementos de solo e da parede da estrutura de suporte.

- Utilização de elementos de barra de dois pontos nodais para simular a presença de estroncas ou tirantes.

- Utilização do modelo elasto-plástico de Lade (1977) para a modelagem de areias.

- Utilização da formulação do modelo de Lade (1979) para a caracterização do comportamento de argilas normalmente adensadas.

- Possibilidade de modelagem de argilas pré-adensadas com base nas considerações aqui sugeridas.

- Utilização de um modelo de comportamento bilinear nos elementos de barra.

- Armazenamento em perfil de banda variável (Skyline) da matriz de rigidez de problemas simétricos ou não-simétricos.

- Utilização de métodos compactos para resolução de sistemas lineares de equações algébricas simétricas ou não-simétricas.

- Possibilidade de simetrização da matriz de rigidez resultante da utilização do modelo elasto-plástico utilizado por meio de diversas técnicas aqui propostas.

- Utilização dos métodos de Euler, Newton-Raphson Standard e Newton-Raphson Modificado para resolução da não-linearidade do problema de elementos finitos.

- Cálculo do estado final de tensões em cada etapa do processo iterativo por meio de uma técnica de integração explícita.

- Utilização de uma linguagem de macro-comandos para a sistematização, por parte do usuário, da sequência de tarefas a serem desenvolvidas durante uma análise.

- Desativação de elementos bidimensionais para simulação de um processo de escavação, considerando a aplicação de forças definidas segundo a metodologia proposta por Mana (1978) e a renumeração dos graus de liberdade do problema.

- Ativação de elementos bidimensionais para simular um processo de aterro, procedendo à renumeração dos graus de liberdade do problema.

- Ativação e desativação de elementos de barra para representar a instalação e remoção de estroncas e/ou tirantes.
- Possibilidade de aplicação de pré-esforço durante a ativação de elementos de barra.
- Definição de um estado geostático ou isotrópico de tensões iniciais no problema em estudo.
- Possibilidade de redefinição durante o transcurso de uma análise dos níveis de tensões correspondentes às superfícies de plastificação, dos materiais dos elementos e das condições de contorno do problema.
- Criação e leitura de arquivos intermediários para permitir a análise em etapas de um problema.
- Criação de arquivos de saída gráfica.
- Armazenamento das matrizes e vetores por meio de alocação dinâmica de memória.

Além do programa *ANLOG*, cujas características foram explicitadas, o desenvolvimento de outros programas se fez necessário. Os programas *LADCOL* e *LADEXP* foram desenvolvidos para automatizar o cálculo dos parâmetros colapsíveis e expansivos do modelo de Lade. O programa *GRAFOG* permite o pós-processamento gráfico dos resultados obtidos, a partir de arquivos definidos através do macro-comando *CGRAF*. Por outro lado, o arquivo *ARVN* caracteriza a árvore de subrotinas necessária como complemento do programa *ANLOG*, caso se utilize o processo de segmentação do código.

Análises preliminares foram desenvolvidas com o intuito de

verificar a implementação dos diferentes macro-comandos. Assim, foram comparados os valores obtidos numericamente com os resultados analíticos de problemas de solução conhecida.

A superfície de ruptura do talude de uma escavação efetuada num solo sem coesão é definido, com base nos conceitos de equilíbrio limite, pelo ângulo de atrito do solo. Este caso de ruptura foi utilizado para verificação dos resultados obtidos numericamente através do programa desenvolvido. O talude apresentou, na análise numérica, uma cunha de ruptura que mostrou uma clara correspondência com os resultados definidos através do equilíbrio limite.

O programa *ANLOG* foi utilizado para a análise de uma obra de escavação denominada Poço Salas Técnicas executada pela Companhia do Metropolitano de São Paulo. A partir dos resultados de ensaios de laboratório obtidas por Parreira (1989) foram modelados a Argila Vermelha e o Solo Variegado, materiais que constituem o perfil geotécnico da região. Para o primeiro destes materiais utilizou-se o modelo de Lade (1979), enquanto que para o segundo efetuou-se uma simplificação da metodologia aqui proposta para a modelagem de argilas pré-adensadas. Definiram-se, então, as tensões e deslocamentos na massa de solo envolvida na escavação e os esforços a que estão submetidas os diferentes componentes da estrutura de suporte ao longo do processo de escavação.

Considerando as diferentes etapas desenvolvidas neste

trabalho, pode-se concluir que:

- Modificações aqui sugeridas no processo de calibração do modelo de Lade (1979) permitem a simulação de forma aproximada do comportamento de argilas pré-adensadas.

- A simetrização proposta da matriz de rigidez obtida com a utilização do modelo elasto-plástico de Lade, se torna um fator de relevância na análise de problemas limitados pela capacidade de memória do computador. A técnica da Matriz Constitutiva Simétrica Média mostrou-se particularmente apropriada.

- O modelo elasto-plástico de Lade consegue representar corretamente o desenvolvimento do mecanismo de ruptura no talude de uma escavação a céu aberto num solo sem coesão através de uma análise por elementos finitos.

- Os resultados obtidos com a utilização do modelo elasto-plástico de Lade em elementos finitos não apresentaram problemas de convergência.

- A análise dos valores do nível de tensões correspondente à superfície de plastificação expansiva alcançados na massa do solo após a escavação, permite uma caracterização das diferentes trajetórias de tensões envolvidas neste processo fornecendo, por outro lado, uma avaliação do fator de segurança à ruptura.

- As reconstituições analíticas do comportamento da Argila Vermelha, desenvolvidas utilizando o modelo elasto-plástico de Lade (1979), representaram fielmente os valores experimentais dos ensaios convencionais de compressão triaxial, compressão

hidrostática e descarregamento lateral obtidos em laboratório.

- Uma simplificação da metodologia proposta para argilas pré-adensadas mostrou-se apropriada para representar o comportamento do Solo Variegado da bacia sedimentar de São Paulo.

- O programa *ANLOG* permitiu uma simulação apropriada do processo construtivo e das características dos materiais envolvidos no processo de escavação do Poço Salas Técnicas, obtendo-se as solicitações exercidas sobre a estrutura de suporte. A magnitude do recalque do prédio adjacente foi insignificante considerando os deslocamentos verticais obtidos ao longo das quatro fases em que foi desenvolvida a escavação.

- O programa *ANLOG* se constitui numa ferramenta importante para a análise de obras de escavação, atendendo à confiabilidade dos resultados obtidos nas diversas verificações efetuadas a respeito da sua implementação e à versatilidade do código na simulação de problemas geotécnicos de características diversas.

Com o objetivo de aprofundar alguns conhecimentos acerca de questões emergentes a partir desta pesquisa, sugere-se a continuidade de trabalhos tais como os indicados a seguir:

- A utilização do programa *ANLOG* na análise de obras geotécnicas tais como túneis em solo, barragens e aterros e a implementação de eventuais macro-comandos que venham a ser considerados importantes para simular o processo construtivo.

- Implementação do elemento de junta para permitir uma

melhor simulação do contato solo-estrutura de contenção.

- Utilização de outros modelos constitutivos, para o que se torna necessária apenas a implementação da matriz constitutiva correspondente, já que a abordagem da não-linearidade neste código permite a utilização de outros modelos elásticos, lineares ou não, e elasto-plásticos de até duas superfícies de plastificação.

- Estudo de obras instrumentadas que permitam, a partir da utilização dos resultados de campo, o desenvolvimento de trabalhos de retro-análise utilizando os valores numéricos obtidos através do programa *ANLOG*.

- Ampliação da presente formulação através da consideração da equação de continuidade da fase líquida, de forma a poder considerar o solo como um meio bi-fásico (teoria de Biot ampliada para comportamento elasto-plástico).

## APÊNDICE

### EXPRESSÕES UTILIZADAS NA CALIBRAÇÃO DE ARGILAS PRÉ-ADENSADAS

A seguir, calcular-se-ão os valores das tensões principais nas quais serão alcançadas as superfícies iniciais de plastificação  $f_{p0}$  e  $f_{c0}$  nos ensaios utilizados para a calibração do modelo de Lade num material pré-adensado.

#### A.1 ENSAIO HC

Torna-se necessário o cálculo do valor da tensão octaédrica  $\sigma_o$  (figura 3.14), na qual começarão a ser desenvolvidas as deformações plásticas colapsíveis num ensaio de compressão hidrostática. Seja  $f_{c0}$  o nível de tensões correspondente à superfície esférica de plastificação inicial do material. Considerando a expressão (3.17) teremos:

$$f_c = I_1^2 + 2 I_2 \quad (a.1)$$

Para o caso do ensaio hidrostático, onde  $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ , tem-se que a superfície inicial esférica é definida pela seguinte expressão:

$$f_{co} = 3 \sigma_o^2 \quad (a.2)$$

e, portanto:

$$\sigma_o = \sqrt{\frac{f_{co}}{3}} \quad (a.3)$$

## A.2 ENSAIO CTC

(a) Cálculo do valor da tensão principal  $\sigma_{1c}$  na qual começarão as deformações plásticas colapsíveis no ensaio CTC executado com o valor de tensão confinante  $\sigma_3$  (figura 3.15). Considerando a expressão (a.1) tem-se:

$$f_{co} = (\sigma_{1c} + 2 \sigma_3)^2 - 2 (2 \sigma_{1c} \sigma_3 + \sigma_3^2) \quad (a.4)$$

$$f_{co} = \sigma_{1c}^2 + 2 \sigma_{1c} 2 \sigma_3 + 4 \sigma_3^2 - 4 \sigma_{1c} \sigma_3 - 2 \sigma_3^2 \quad (a.5)$$

$$f_{co} = \sigma_{1c}^2 + 2 \sigma_3^2 \quad (a.6)$$

ou bem:

$$\sigma_{1c} = \sqrt{f_{co} - 2 \sigma_3^2} \quad (a.7)$$

(b) Cálculo da tensão principal  $\sigma_{1e}$  na qual terão início as deformações plásticas expansivas num ensaio CTC executado com o valor de tensão confinante  $\sigma_3$ . Considerando a expressão (3.24) tem-se:

$$f_p = \left[ \frac{I_1^3}{I_3} - 27 \right] \left[ \frac{I_1}{\rho a} \right]^m \quad (a.8)$$

e, para a superfície inicial expansiva:

$$f_{p0} = \left[ \frac{(\sigma_{1e} + 2\sigma_3)^3}{\sigma_{1e} \sigma_3^2} - 27 \right] \left[ \frac{\sigma_{1e} + 2\sigma_3}{\rho a} \right]^m \quad (a.9)$$

$$f_{p0} \left[ \frac{\rho a}{\sigma_{1e} + 2\sigma_3} \right]^m + 27 = \frac{(\sigma_{1e} + 2\sigma_3)^3}{\sigma_{1e} \sigma_3^2} \quad (a.10)$$

ou bem:

$$\left\{ \left[ f_{p0} \left[ \frac{\rho a}{\sigma_{1e} + 2\sigma_3} \right]^m + 27 \right] \sigma_{1e} \sigma_3^2 \right\}^{1/3} - 2\sigma_3 = \sigma_{1e} \quad (a.11)$$

Esta expressão permitirá a obtenção do valor  $\sigma_{1e}$  através de um processo iterativo.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Albrecht, P., "Análise Numérica. Um Curso Moderno", Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., Rio de Janeiro, 1973.

Armento, W. J., "Criteria for Lateral Pressures for Braced Cuts", Proceedings of the ASCE Speciality Conference on Performance of Earth and Earth Supported Structures, Vol.1, Part 2, 1972, pp. 1283-1302.

Azevedo, R. F., "Centrifugal and Analytical Modeling of Excavations in Sand", Ph.D. Thesis, University of Colorado, Boulder, 1983.

Azevedo, R. F. and Consoli, N., "Comparisons Between Field and Analytical Behaviour of an Experimental Excavation", Proceedings of the Second International Conference on Case Histories in Geotechnical Engineering, Vol.2, St. Louis, 1988, pp.1465-1469.

Azevedo, R. F. and Farias, M. M., "Elasto-Plastic Modeling of Compressibility and Strength Characteristics of a Sand",

Proceedings of the International Conference of Computational Plasticity, Barcelona, 1987, pp.1527-1540.

Azevedo, R. F. e Farias, M. M., "Previsão das Características de Deformabilidade e Resistência de Areias por um Modelo Elasto-Plástico", VIII Congresso Brasileiro de Mecânica dos Solos e Engenharia de Fundações, 1986, pp.45-56.

Azevedo, R. F. and Ko, H. Y., "Comparisons Between Centrifugal and Numerical Modelling of Unsupported Excavations in Sand", Proceedings of the International Symposium on Numerical Models in Geomechanics NUMOG II, Ghent, 1986a, pp.293-299.

Azevedo, R. F. and Ko, H. Y., "Finite, Element Analysis of Centrifugal Excavations", Proceedings of the Third Int. Conf. of Computational Methods and Experimental Measurements, Porto Carras, 1986b, pp.739-748.

Azevedo, R. F. and Santos, L. A., "Field Observation and Finite Element Analysis of a Subway Excavation", Proceedings of the Second International Conference on Case Histories in Geotechnical Engineering, Vol.1, St. Louis, 1988, pp.689-694.

Bathe, K. J., "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", First Edition, Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1982.

Bjerrum, L. and Anderson, K., "In-situ Measurement of Lateral Pressures in Clay", Proceedings of the Fifth European

Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Madrid, 1973, pp.11-20.

Bjerrum, L.; Clausen, C. J. and Duncan, J. M., "Earth Pressure on Flexible Structures - A State of the Art Report", Proceedings of the Fifth European Conference of Soil Mechanics and Foundation Engineering, Vol.2, Madrid, 1972, pp.169-196.

Bowles, J. E., "Foundation Analysis and Design", Third Edition, McGraw-Hill Int. Book Company, Singapore, 1982.

Broms, B. B., Wong, I. H. and Wong, K. S., "Experience with Finite Element Analysis of Braced Excavations in Singapore", Proceedings of the International Symposium on Numerical Models in Geomechanics NUMOG II, Ghent, 1986, pp.309-324.

Brooker, E. W. and Ireland, H. O., "Earth Pressures at Rest Related to Stress History", Canadian Geotechnical Journal, Vol.2, No.1, 1965, pp. 1-15.

Cardoso, A. S., "A Model to Simulate Excavations Supported by Nailing", Proceedings of the International Symposium on Numerical Models in Geomechanics NUMOG II, Ghent, 1986, pp.531-537.

Chandrasekaran, V. S. and King, G. J., "Simulation of Excavations Using Finite Elements", Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, GT 9, 1974, pp. 1086-1089.

Christian, J. T. and Wong, J. H., "Errors in Simulating Excavations in Elastic Media by Finite Elements", Soils and Foundations, Vol. 13, No. 1, 1973, pp. 1-10

Clough, G. W. and Duncan, J. M., "Finite Element Analyses of Port Allen and Old River Locks", Contract Report S-69-6, U.S. Army Engineer Waterways Experiment Station, Corps of Engineers, Mississippi, 1969.

Clough, G. W. and Mana, A. I., "Lessons Learned in Finite Element Analyses of Temporary Excavations in Soft Clay", Second International Conference on Numerical Methods in Geomechanics, Vol.1, ASCE, Virginia, 1976, pp.496-510.

Clough, G. W. and Tsui, Y., "Performance of Tied-Back Walls in Clay", Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, Vol.100, No. GT12, 1974, pp.1259-1274.

Clough, G. W.; Weber, P. R. and Lamont, J., "Design and Observation of Tied-Back Wall", Proceedings of the Specialty Conference on Performance of Earth and Earth-Supported Structures, Vol.1, Part 2, ASCE, 1972, pp.1367-1390.

Clough, R. W., "The Finite Element in Plane Stress Analysis", Proceedings of the Second ASCE Conference on Electronic Computation, Pittsburgh, 1960.

Cole, K. W. and Burland, J. B., "Observation of Retaining Wall Movements Associated with a Large Excavation", Proceedings of the Fifth European Conference on Soil Mechanics, Vol.1, Madrid, 1972, pp.445-453.

Companhia do Metropolitano de São Paulo, "Perfis Padrão CMSP", Documento Técnico PP-9.00.00.00/5H9-008, São Paulo, 1982.

Cook, R. D., "Concepts and Applications of Finite Element Analysis", Second Edition, John Wiley and Sons, New York, 1981.

Cuitino, A.M.; Gioia, G. y Dvorkin, E. N., " Um Modelo de Hormigón Basado en Plasticidad No Asociada y Fractura" (no prelo), Noveno Congreso Latinoamericano e Iberico Sobre Métodos Computacionales Para Ingeniería, Córdoba, 1988.

Desai, C. S. and Christian, J. T. (Editors), "Numerical Methods in Geotechnical Engineering", McGraw-Hill Inc., New York, 1977.

Desai, C. S. and Siriwardane, H. J., "Constitutive Laws for Engineering Materials with Emphasis on Geologic Materials", Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1984.

Drucker, D. C., "Some Implications of Work-Hardening and Ideal Plasticity", Quarterly Journal of Applied Mathematics, Vol.7, 1950, pp.411-418.

Duncan, J. M. and Chang, C. Y., "Nonlinear Analysis of Stress

and Strain in Soils", Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, Vol. 96, No.SM5, 1970, pp.1629-1653.

Duncan, J. M. and Clough, G. W., "Finite Element Analyses of Port Allen Lock", Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, SM8, 1971, pp.1053-1068.

Eisenstein, Z. and Medeiros, L. V., "A Deep Retaining Structure in Till and Sand. Part II: Performance and Analysis", Canadian Geotechnical Journal, Vol.20, 1983, pp.131-140.

Estefen, S. F., "Collapse of Ring Stiffened Cylinders", PhD Thesis, University of London, Imperial College of Science and Technology, 1984.

Felippa, C. A., "Solution of Linear Equations with Skyline-Stored Symmetric Matrix", Computers and Structures, Vol.5, 1975, pp.13-29.

Gattass, M.; Ferrari, M. C. e Figueiredo, L. H., "Soluções de Sistemas de Equações de Matrizes Esparsas Simétricas Positivas Definidas -O Método de Crout Modificado-", Artigo Técnico AT 24/84, Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 1984.

Goodman, R. E.; Taylor, R. L. and Brekke, T. L., "A Model for the Mechanics of Jointed Rock", J. Soil Mech. Found. Div., ASCE, Vol.94, No.SM3, 1968, pp.637-659.

Hata, S.; Ohta, H.; Yoshida, S.; Kitamura, H. and Honda, H., "A Deep Excavation in Soft Clay - Performance of an Anchored Diaphragm Wall", Proceedings of the Fifth International Conference on Numerical Methods in Geomechanics, Nagoya, Vol.2, 1985, pp.725-730.

Hehl, M. E., "Linguagem de Programação Estruturada FORTRAN 77", McGraw Hill Ltda., São Paulo, 1986.

Henkel, D. J. and Sowa, V. A., "The Influence of Stress History on Stress Paths in Undrained Triaxial Tests on Clay, ASTM STP 361, 1963, pp.280-291.

Hill, R., "The Mathematical Theory of Plasticity", Oxford University Press, London, 1950.

Hinton, E. and Owen, D. R. J., "Finite Element Programming", First Edition, Academic-Press Inc., London, 1977.

Hood, P., "Frontal Solution Program for Unsymmetric Matrices", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol.10, 1976, pp.379-400.

Jennings, A., "Matrix Computations for Engineers and Scientists", John Wiley and Sons, New York, 1977.

Kenney, T. C., "Field Measurements of In-situ Stress in Quick Clays", Proceedings of the Oslo Geotechnical Conference, 1967,

pp.49-55.

Kim, M. K. and Lade, P. V., "Modelling Rock Strength in Three Dimensions", Int. J. Rock Mech. Min. Sci. and Geomech. Abstr., Vol.21, No.1, 1984, pp.21-33.

Kim, M. K. and Lade, P. V., "Single Hardening Constitutive Model for Frictional Materials, I. Plastic Potential Function", Computers and Geotechnics, Vo.5, No.4, 1988, pp.307-324.

Kulhawy, F. H. "Embankments and Excavations", Numerical Methods in Geotechnical Engineering, (Desai, C. S. and Christian, J. T.), McGraw-Hill Inc., New York, 1977.

Küpper, A. A. G., "Características de Tensão-Deformação-Resistência das Argilas Vermelhas do Terciário de São Paulo", Tese de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 1983.

Küpper, A. A. G.; Costa Filho, L. M. e Antunes, F. S., "Geotechnical Characterization of São Paulo Red Clay", TROPICALS'85, 1985, pp.117-129.

Lade, P. V., "The Stress- Strain and Strength Characteristics of Cohesionless Soil", Ph.D. Thesis, University of California, Berkeley, 1972.

Lade, P. V., "Elasto-Plastic Stress-Strain Theory for

Cohesionless Soil with Curved Yield Surfaces", Report No. GK37445 to National Science Foundation, University of California, Los Angeles, 1975.

Lade, P. V., "Elasto-Plastic Stress-Strain Theory for Cohesionless Soil with Curved Yield Surfaces", International Journal of Solids and Structures, Vol.13, 1977, pp.1019-1035.

Lade, P. V., "Stress-Strain Theory for Normally Consolidated Clay", Proceedings of the Third International Conference on Numerical Methods in Geomechanics, Vol.4, Aachen, 1979, pp.1325-1337.

Lade, P. V., "Elasto-Plastic Stress-Strain Model for Sand", Limit Equilibrium, Plasticity and Generalized Stress-Strain in Geotechnical Engineering, McGill University, New York, 1980.

Lade, P. V. and Duncan, J. M., "Cubical Triaxial Tests on Cohesionless Soil", Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, SM 10, 1973, pp.793-812.

Lade, P. V. and Duncan, J. M., "Elasto-Plastic Stress-Strain Theory for Cohesionless Soil", Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, GT 10, 1975, pp.1037-1053.

Lade, P. V. and Kim, M. K., "Single Hardening Constitutive Model for Frictional Materials, II. Yield Criterion and Plastic Work Contours", Computers and Geotechnics, Vol.6, 1988a,

pp.13-29.

Lade, P. V. and Kim, M. K., "Single Hardening Constitutive Model for Frictional Materials, III. Comparisons with Experimental Data", Computers and Geotechnics, Vol.6, 1988b, pp.31-47.

Lade, P. V. and Musante, H. M., "Failure Conditions in Sand and Remolded Clay", Proceedings of the Ninth International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Vol.1, Tokyo, 1977, pp.181-186.

Lade, P. V. and Nelson, R. B., "Incrementalization Procedure for Elasto-Plastic Constitutive Model with Multiple, Simultaneous Yield Surfaces", International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol.8, 1984, pp.311-323.

Lade, P. V.; Nelson, R. B. and Ito, Y. M., "Nonassociated Flow and Stability of Granular Materials", Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 113, Vol.113, 1987, pp.1032-1318.

Lade, P. V. and Pradel D., "Comparison of Single and Double Hardening Constitutive Models for Frictional Materials", Proceedings of the International Symposium on Numerical Models in Geomechanics NUMOG III, Niagara Falls, 1989, pp.147-154.

Lambe, T.W. and Whitman, R.V., "Soil Mechanics", John Wiley and

Sons, New York, 1969.

Lee, F. H.; Yong, K. Y.; Lee, S. L. and Toh, C. T., "Finite Element Modelling of a Strutted Excavation", Proceedings of the Third International Symposium on Numerical Models in Geomechanics - NUMOG III, Niagara Falls, 1989, pp.577-584.

Leite, R. L. L., Diniz, H. and Bigarella, L. P., "Casos Práticos de Cálculo de Parede Diafragma Utilizando o Método dos Elementos Finitos", Simpósio Sobre Aplicações de Microcomputadores em Geotecnia - Microgeo 88, São Paulo, 1988, pp.263-274.

Mana, A. I., "Finite Element Analyses of Deep Excavation in Soft Clay", Ph.D. Thesis, Stanford University, California, 1978.

Marques, J. M. M. C., "Stress Computation in Elastoplasticity", Eng. Comput., Vol.1, 1984, pp.42-51.

Massad, F., "Efeito da Temperatura nos Empuxos de Terra sobre Escoramentos de Valas", Tese de Doutorado, POLI-USP, 1978.

Massad, F., "Características Geotécnicas das Argilas Porosas Vermelhas de São Paulo", Anais do V Congresso Brasileiro de Mecânica dos Solos e Engenharia de Fundações, São Paulo, Vol.2, 1974, pp.131-144.

Massad, F.; Samara, V. e Barros, J. M. C., "Engineering Properties of Two Layers of Lateritic Soils from São Paulo City, Brazil", TROPICALS'85, 1985, pp.331-343.

Matos Fernandez, M. A., "Estruturas Flexíveis Para Suporte de Terras. Novos Métodos de Dimensionamento", Tese de Doutorado, Universidade do Porto, 1983.

Matties, H. and Strang, G., "The Solution of Nonlinear Finite Element Equations", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol.14, 1979, pp.1613-1626.

Mayne, P. W. and Kulhawy, F. H., "Ko-OCR Relationships in Soils", Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, Vol. 108, No. Gt6, 1982, pp.851-872.

Medeiros, L. V., "Deep Excavation in Stiff Soils", Ph.D. Thesis, University of Alberta, Edmonton, 1979.

Medeiros, L.V. and Eisenstein, Z., "A Deep Retaining Structure in Till and Sand. Part I: Stress Path Effects," Canadian Geotechnical Journal, Vol.20, no.1, 1983, pp.120-130.

Meem, J. C., "The Bracing of Trenches and Tunnels with Practical Formulas for Earth Pressure", Trans. ASCE, Vol.60, paper No.1062, 1908, pp.1-23.

Mendelson, A., "Plasticity: Theory and Applications", Macmillan

Publishing Co. Inc., New York, 1968.

Mendes, M. C., "Influência de Juntas Solo-Estrutura em Escavações a Céu Aberto", Tese de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 1988.

Mondkar, D. P. and Powell, G. H., "Towards Optimal In-Core Equation Solving", Computer and Structures, Vol.4, 1974, pp.531-548.

Mondkar, D. P. and Powell, G. H., "Evaluation of Solution Schemes for Nonlinear Structures", Computer and Structures, Vol.9, 1978, pp.223-236.

Morgenstern, N. R. and Eisenstein, Z., "Methods of Estimating Lateral Loads and Deformations", Proceedings ASCE Specialty Conference on Lateral Stresses in the Ground and Design of Earth-Retaining Structures, Cornell University, 1970, pp.51-102.

Monnet, J.; Kastner, R. and Laréal, P., "Finite Element Calculation and Experimentings on the Saxe-Gambetta Station", Proceedings of the Fifth International Conference on Numerical Methods in Geomechanics, Nagoya, 1985, pp.747-753.

Nayak, G. C. and Zienkiewicz, O. C., "Elasto-Plastic Stress Analysis. A Generalization for Various Constitutive Relations Including Strain Softening", International Journal for

Numerical Methods in Engineering, Vol.5, 1972, pp.133-135.

Naylor, D.J. and Pande, G. N., "Finite Elements in Geotechnical Engineering", First Edition, Pineridge Press, Swansea, 1981.

NBR 8800/1986, "Projeto e Execução de Estruturas de Aço de Edifícios", Associação Brasileira de Normas Técnicas, Rio de Janeiro, 1986.

Noli, L. A., "Análise Paramétrica Linear Elástica da Escavação de Camboinhas", Tese de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 1980.

Nyssen, C. , "An Efficient and Accurate Iterative Method Allowing Large Incremental Steps, to Solve Elasto-Plastic Problems", Computers and Structures, Vol.13, 1981, pp.63-71.

Owen, D. R. J. and Hinton, E., "Finite Elements in Plasticity", Pineridge Press Limited, Swansea, 1980.

Palmer, J. H. and Kenney, T. C., "Analytical Study of a Braced Excavation in Weak Clay", Canadian Geotechnical Journal, Vol.9, 1972, pp.145-164.

Pande , G. N. and Pietruszczak, S., "Symmetric Tangential Stiffness Formulation for Non-Associated Plasticity", Computers and Geotechnics, Vol.2, 1986, pp.89-99.

Parreira, A. B., Resultados de Ensaios de Laboratório, "Estudo do Solo da Cidade de São Paulo com Vista à Análise de Escavações" (tese de doutorado a ser defendida), Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1989.

Peck, R. B., "The Measurement of Earth Pressure on the Chicago Subway", Bulletin ASTM, August 1941.

Peck, R. B., "Earth Pressure Measurements in Open Cuts Chicago (Illinois) Subway", Trans. ASCE, Vol.108, 1943, pp.1008-1036.

Peck, R. B., "Deep Excavations and Tunneling in Soft Ground", 7th. ICSMFE, State of the Art Volume, 1969, pp.225-290.

Pontes, I. and Medeiros, L. V., "Finite Element Analysis of an Experimental Excavation", Proceedings of the Fourth International Conference on Numerical Methods in Geomechanics, Vol.2, Edmonton, 1982, pp. 699-705.

Poorooshasb, H. B.; Holubec, I. and Sherbourne, A. N., "Yielding and Flow of Sand in Triaxial Compression: Part I", Canadian Geotechnical Journal, 1966, pp.179-190.

Prager, W., "Recent Developments in the Mathematical Theory of Plasticity", Journal of Applied Physics, Vol.20, No.3, 1949, pp.235-240.

Salençon, J., "Applications of the Theory of Plasticity in Soil

Mechanics", John Wiley and Sons Ltd., 1977.

Scott, R.F., "Principles of Soil Mechanics", Addison Wesley Publishing Co., Mass., 1963.

Skempton, A. W., "Horizontal Stresses in an Overconsolidated Clay", Proceedings of the Fifth International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Vol.1, 1961.

Smith, I. M., "Programming the Finite Element Method, with Application to Geomechanics", John Wiley and Sons Ltd., 1982.

Sousa Pinto, C. e Massad, F., "Características dos Solos Variegados da Cidade de São Paulo", IPT, Publ.984, São Paulo, 1972.

Stabrowski, M. M., "An Algorithm for the Solution of Very Large Banded Unsymmetric Linear Equation Systems", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.17, 1981, pp.1103-1117.

Taylor, D.W., "Fundamentals of Soil Mechanics", John Wiley and Sons, New York, 1948.

Taylor, R. L., "Computer Procedures for Finite Element Analysis", The Finite Element Method (Zienkiewicz, O. C.), Third Edition, McGraw-Hill Book Company, New York, 1977.

Taylor, R.L; Wilson, E.L and Sacket, S.J., "Direct Solution of Equations by Frontal and Variable Band, Active Column Methods", Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics, Proceedings of the Europe-U.S. Workshop, Ruhr-Universitat Bachum, 1980.

Terzaghi, K., "General Wedge Theory of Earth Pressure", Trans. ASCE, 1941, pp.60-80 and 89-97.

Terzaghi, K., "Theoretical Soil Mechanics", John Wiley and Sons, New York, 1943.

Terzaghi, K. and Peck, R. B., "Soil Mechanics in Engineering Practice", Second Edittion, John Wiley and Sons, 1967.

Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., "Theory of Elasticity", Third edition, McGraw Hill Inc., New York, 1970.

Tschebotarioff, G. P., "Foundation, Retaining and Earth Structures", Second Edition, McGraw Hill Book Company, New York, 1973.

Tsui, Y. and Clough, G. W., "Plane Strain Approximations in Finite Element Analyses of Temporary Walls", Proceedings of the ASCE Specialty Conference on Analysis and Design in Geotechnical Engineering, Austin, Texas ,Vol.1 ,1974, pp.173-198.

Westergaard, H. M., "Theory of Elasticity and Plasticity", Dover, New York, 1964.

Wilson, E. L.; Bathe, K. J. and Doherty, W. P., "Direct Solution of Large Systems of Linear Equations", Computers and Structures, Vol.4, 1974, pp.363-372.

Wong, I. A., "Analysis of Braced Excavations", Ph.D. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts, 1971.

Xiong, W., "Symmetric Formulation of Tangential Stiffnesses for Non-Associated Plasticity", Fifth International Conference on Numerical Methods in Geomechanics, Nagoya, 1985, pp.341-347.

Yong, R. K. and Ko, H. Y. (Editors), "Limit Equilibrium, Plasticity and Generalized Stress-Strain in Geotechnical Engineering", ASCE, New York, 1980.

Zienkiewicz, O. C., "The Finite Element Method", Third Edition, McGraw-Hill Book Company, New York, 1977.

Zornberg, J. G. e Azevedo, R. F., "Análise por Elementos Finitos da Superfície de Ruptura de Escavações a Céu Aberto Utilizando um Modelo Elástico-Plástico Não-Associado" (no prelo), Noveno Congreso Latinoamericano e Iberico Sobre Métodos Computacionales Para Ingeniería, Córdoba, 1988.

"Análise por Elementos Finitos do Comportamento de Escavações utilizando um modelo elasto-plástico".

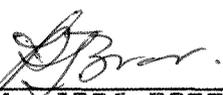
Dissertação de Mestrado apresentada por JORGE GABRIEL ZORNBERG em 11 de agosto de 1989 ao Departamento de Engenharia Civil da PUC/RJ, e aprovada pela Comissão Julgadora formada pelos seguintes membros:

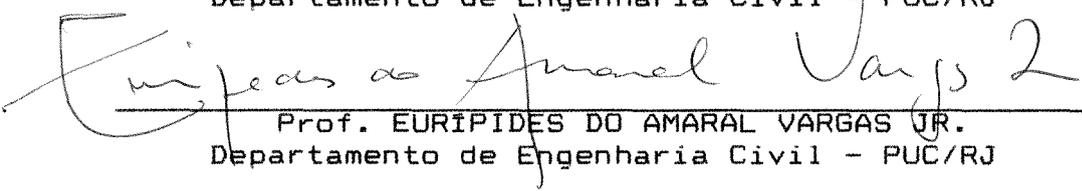
  
\_\_\_\_\_  
Prof. ROBERTO FRANCISCO DE AZEVEDO (Orientador)  
Departamento de Engenharia Civil - PUC/RJ

  
\_\_\_\_\_  
Prof. LUCIANO VICENTE DE MEDEIROS  
Departamento de Engenharia Civil - PUC/RJ

  
\_\_\_\_\_  
Prof. ARSENIO NEGRO JR.  
Fac. Engenharia F.A.A.P. - BUREAU de Projetos e Consultoria

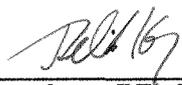
  
\_\_\_\_\_  
Eng. RICARDO LUIZ LEONARDO LEITE  
Companhia do Metropolitano de São Paulo

  
\_\_\_\_\_  
Prof. JOSÉ ROBERTO BRANDT  
Departamento de Engenharia Civil - PUC/RJ

  
\_\_\_\_\_  
Prof. EURÍPIDES DO AMARAL VARGAS JR.  
Departamento de Engenharia Civil - PUC/RJ

Visto e permitida a impressão

Rio de Janeiro, 21/8/89

  
\_\_\_\_\_  
Prof. BELITA KOILLER  
Coordenadora dos Programas de Pós-Graduação do  
Centro Técnico Científico